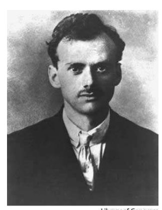
MATHEMATIQUES

MAT 3101





Telecom SudParis

Enoncés des exercices de Travaux Dirigés

Programme prévisionnel

Les séances de Tds suivront approximativement le séquencement suivant.

Chapitre de cours correspondant	TD	Exercices à faire
1	1	1,2
	2	3,4
2	3	5,7,9
	4	10,11,12
3	5	14,15,16
	6	17,18,20
	7	21,22
4	8	26,27
	9	27,28
5	10	38
	11	38,39
	12	39,40
Révisions, Annales	13	

Dans le reste du document, les exercices encadrés sous la forme $\boxed{\blacktriangleright\text{Exercice XX}}$ sont à comprendre en priorité.

Première partie

Théorie de la mesure et intégration

Rappel des points essentiels.

a) Les deux notions importantes du chapitre sont les tribus et les mesures.
b) Les tribus ne sont pas en général explicitables mais en général, on considérera la tribu engendrée par certains ensembles d'intérêt.
c) Des exemples de mesures concernent aussi bien des mesures discrètes (mesure de Dirac) que des mesures "continues" (mesure de Lebesgue).
d) On a vu trois propriétés fondamentales des mesures : monotonie, sous additivité, continuité.
e) Il faut typiquement savoir : montrer que quelque chose est une tribu, que deux tribus engendrées coincident, que que quelque chose est une mesure et connaitre les propriétés fondamentales des mesures.

a) Les notions importantes sont les fonctions mesurables et l'intégrale au sens de Lebesgue.
b) L'intégrale d'une fonction positive f est obtenue comme limite des intégrales d'une suite croissante de fonctions étagées convergeant simplement vers f.
c) Les trois théorèmes importants sont le théorème de convergence monotone, le lemme de Fatou et le théorème de convergence dominé.
d) Ce chapitre a aussi permis de permuter limite et intégration, série et intégration, continuité et intégration, dérivation et intégration.
e) On notera qu'ici à partir d'une mesure quelconque ν (pas nécessairement la mesure de Lebesgue), on construit l'intégrale $\int f d\nu$ qui est appelée intégrale de Lebesgue. On veillera donc à ne pas confondre, *mesure de Lebesgue* et *intégrale de Lebesgue*.

▶ **Exercice 1** Montrer que la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$ est engendrée par :
- les fermés ;
- les intervalles du type $]a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$;
- les intervalles du type $]-\infty, b]$ $(b \in \mathbb{R})$..

Exercice 2 Pour chacun des deux cas suivants, prouver que μ est une mesure.

1. Soient E un ensemble non vide, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$ et $a \in E$. On pose pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$,
$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A, \\ 0 & \text{si } a \notin A. \end{cases}$$
δ_a est appelée mesure ou masse de Dirac au point a.
2. Soit D un ensemble dénombrable $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \ldots)$. Soit :
$$\mu_d : \mathcal{P}(D) \to [0, +\infty]$$
$$A \mapsto \mu_d(A) = \mathrm{Card}(A)$$
On appelle μ_d mesure de dénombrement ou mesure de comptage.

▶ **Exercice 3** Soient τ_1 et τ_2 deux tribus engendrées respectivement par deux familles d'ensembles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

1. Vérifier que $\tau_1 \cap \tau_2$ est une tribu ; est elle engendrée par $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$?

2. On considère les sous ensembles de $\mathcal{P}(\Omega)$

$$\mathcal{F}_1 = \{A_1 \cap A_2; A_1 \in \tau_1,\ A_2 \in \tau_2\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_2 = \{A_1 \cup A_2; A_1 \in \tau_1,\ A_2 \in \tau_2\}$$

Montrer que $\sigma(\mathcal{F}_1) = \sigma(\mathcal{F}_2)$.

3. Vérifier qu'en général $\tau_1 \cup \tau_2$ n'est pas une tribu et montrer que $\sigma(\tau_1 \cup \tau_2) = \sigma(\mathcal{F}_1)$.

▶ **EXERCICE 4** Soient E_1 et E_2 deux ensembles non vides et soit f une application de E_1 dans E_2.

1. Montrer que si τ_2 est une tribu sur E_2, alors

$$\tau = f^{-1}(\tau_2) = \{f^{-1}(B) : B \in \tau_2\}$$

est une tribu de parties de E_1 appelée *tribu image réciproque* de τ_2 par f.

2. Soit τ_1 une tribu de parties de E_1 ; montrer sur un exemple que $f(\tau_1) = \{f(A) : A \in \tau_1\}$ n'est pas une tribu sur E_2.

3. Soit τ_1 une tribu de parties de E_1 ; montrer que l'ensemble

$$\tau' = \{B \in \tau_2; f^{-1}(B) \in \tau_1\}$$

est une tribu de parties de E_2 que l'on appelle *tribu induite* de τ_1 par f et que l'on note $\tau_{1,f}$.

4. Montrer que pour toute famille de sous-ensembles $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(E_2)$, on a

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{S})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{S}))$$

Ce résultat est parfois appelé *lemme du transport*.

▶ **EXERCICE 5** Soit $\tau = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A = -A\}$ où $-A = \{-x : x \in A\}$.

1. Montrer que $A \in \tau$ ssi on a l'implication $(x \in A) \Rightarrow (-x \in A)$.
2. Montrer que τ est une tribu sur $\mathbb{R}$.
3. Les applications $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$, $g : x \mapsto x^3$ et $h : x \mapsto \cos x$
   (a) sont elles $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \tau)$-mesurables ?
   (b) sont elles $(\tau, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables ?
   (c) sont elles (τ, τ)-mesurables ?
4. Caractériser les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont $(\tau, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables.
5. Caractériser les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont (τ, τ)-mesurables.

EXERCICE 6 *Le but de cet exercice est d'exhiber un borélien de $\mathbb{R}$ non dénombrable et de mesure de Lebesgue nulle.* On considère la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $[0, 1]$ définie par

$$\begin{aligned}
A_0 &= [0, 1], \\
A_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \\
A_2 &= \left[0, \frac{1}{3^2}\right] \cup \left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3^2}\right] \cup \left[\frac{8}{3^2}, 1\right],
\end{aligned}$$

si $A_n = \cup_{1\leq p\leq N}[a_{n,p}, b_{n,p}]$ où $a_{n,p} \leq b_{n,p}$ alors

$$A_{n+1} = \cup_{1\leq p\leq N}\left(\left[a_{n,p}, a_{n,p} + \frac{b_{n,p} - a_{n,p}}{3}\right] \cup \left[a_{n,p} + 2\frac{b_{n,p} - a_{n,p}}{3}, b_{n,p}\right]\right)$$

On pose

$$C = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

L'ensemble C s'appelle l'ensemble *triadique de Cantor*. On pourra faire un dessin pour les premières étapes.

1. Vérifier que pour tout entier n, A_n est formé de 2^n intervalles fermés, deux à deux disjoints et que $\lambda(A_n) = \frac{2^n}{3^n}$ où λ est la mesure de Lebesgue.
2. Montrer que C est un borélien non vide de mesure de Lebesgue nulle.
3. Vérifier que C est en bijection avec $[0, 1]$ et est donc non dénombrable.

▶ **EXERCICE 7** Etudier la véracité des affirmations suivantes :

1. Un ouvert de $\mathbb{R}$ est borné si, et seulement si, il est de mesure de Lebesgue finie.
2. Un borélien de $\mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue nulle si et seulement si il est dénombrable.
3. Un borélien de $\mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue strictement positive si, et seulement si, il contient un ouvert non vide.
4. Dans $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), et pour $p \in \{1, \ldots, n-1\}$, l'ensemble $\mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

EXERCICE 8 Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas Riemann-intégrable.
2. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ l'est aussi. On a alors $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (a) Montrer que chaque f_n est Riemann-intégrable et calculer $\int_0^1 f_n(x)\, dx$.

   (b) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[0, 1]$. Que peut-on en déduire ?

3. On se place dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue. Montrer que f est Lebesgue-intégrable et vérifier qu'on peut bien appliquer le théorème de la convergence dominée.

▶ **EXERCICE 9** On pose pour tout $x \in [1, +\infty[$: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$. Calculer $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.

▶ **EXERCICE 10** Montrer que la suite suivante converge et déterminer sa limite :

$$\left(\int_0^{+\infty} \arctan(nx)\mathrm{e}^{-x^n}\, dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

▶ $\boxed{\textsc{Exercice 11}}$ Etablir que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln x\, dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln x\, dx$$

puis en déduire à l'aide du changement de variables $y = 1-\frac{x}{n}$:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln x\, dx = \lim_{n\to+\infty}\left[\ln n - (1+1/2+\ldots+1/n)\right].$$

▶ $\boxed{\textsc{Exercice 12}}$ Calculer

$$I = \iiint_D \frac{1}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}\, dx\, dy\, dz$$

où $D =]0,1[^2 \times]0,+\infty[$ et en déduire :

$$I = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan\ z}{z}\right)^2\, dz$$

Exercice 13 Soit $f(x,y) = e^{-y}\sin(2xy)$. Montrer que f est intégrable sur $\Delta =]0,1[\times]0,+\infty[$.
En déduire :

$$I = \iint_\Delta f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty} e^{-y}\frac{\sin^2 y}{y}\, dy.$$

Deuxième partie

Fonctions d'une variable complexe

RAPPEL DES POINTS ESSENTIELS.

a) Il faut connaître tous les outils pour montrer qu'une fonction est holomorphe.
b) On doit pouvoir facilement calculer l'indice d'un point par rapport à un lacet et on doit pouvoir connaître toutes les techniques pour calculer un résidu.
c) Si le lacet entoure une singularité ou plusieurs singularité, l'intégrale peut être calculée par le théorème des résidus. Le lemme de Jordan permet d'utiliser ensuite le théorème des résidus pour calculer des intégrales impropres.

▶ **EXERCICE 14** 1. Etudier l'holomorphie et, le cas échéant, calculer la dérivée des fonctions suivantes :
— $z \mapsto z^2$
— $z \mapsto \overline{z}$
— $z \mapsto |z|^2$
— $z \mapsto z.e^z$

2. Montrer les conditions dites de Cauchy d'holomorphie d'une fonction f, en coordonnées cartésiennes puis en coordonnées polaires.
3. Etudier l'holomorphie et calculer la dérivée de :
— $z = x + \mathrm{i}y \mapsto x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 - 3x - 3\mathrm{i}y + 4$ ($x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$)
— $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \mapsto \sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2})$ ($r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in]0, \pi[$).

▶ **EXERCICE 15** — Montrer que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe sur un ouvert connexe par arc de $\mathbb{C}$ et différentiable sur cet ouvert, alors on a équivalence entre les propriétés :
(i) f est constante sur Ω.
(ii) $P = \mathcal{R}\mathrm{e}\ (f)$ est constante sur Ω.
(iii) $Q = \mathcal{I}\mathrm{m}\ (f)$ est constante sur Ω.
(iv) $|f|$ est constante sur Ω.
(v) $\overline{f}$ est holomorphe sur Ω.

— Montrer qu'une fonction holomorphe et à valeurs réelles sur un domaine ouvert $\Omega \in \mathbb{C}$ est constante.

▶ **EXERCICE 16** 1. Rappeler les développements des fonctions classiques $\exp, \cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}$.

2. Donner pour $z = x + \mathrm{i}y, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ une expression de e^z à partir de fonctions de variables réelles.
3. Donner le lien entre $\cos$ et ch ainsi qu'entre $\sin$ et sh.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\cos z = 0$. On notera $z = x + \mathrm{i}y, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$.

▶ **EXERCICE 17** On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle unité orienté dans le sens des θ croissants (on dit aussi "orienté positivement", ou "dans le sens inverse des aiguilles d'une montre"...).

1. Calculer $\int \frac{dz}{z}$ sur le chemin $\mathcal{C}_+$ défini par un arc de cercle allant du point 1 au point -1 en passant par le demi-plan supérieur $\mathcal{I}\mathrm{m}\ \{z\} \geq 0$. Même question avec le chemin $\mathcal{C}_-$ passant cette fois par le demi-plan $\mathcal{I}\mathrm{m}\ \{z\} \leq 0$.
2. Calculer $\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z}$. Conclusion ?
3. Calculer $\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Conclusion ?

▶ $\boxed{\textsc{Exercice 18}}$ Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathcal{T}} \frac{dz}{z^2}$ ou $\mathcal{T}$ est le chemin menant du point 3 au point $\mathrm{i}\sqrt{3}$ en passant par l'arc de cercle d'équation $(x-1)^2+y^2=4$.

Exercice 19

1. Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation en u : $e^u = z$.
2. On rappelle que les conditions de Cauchy s'écrivent en coordonnées polaires (pour une fonction $f = P + \mathrm{i}Q$) :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$$

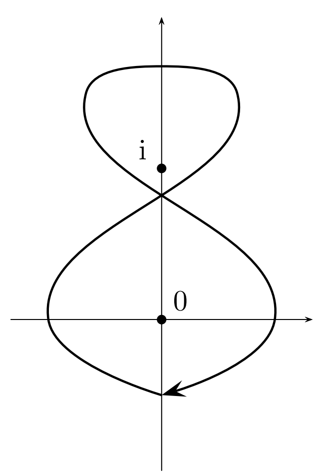
   Déterminer les fonctions holomorphes dont la partie réelle est une fonction de r seulement.
3. Comment se définit un logarithme sur $\mathbb{C}$? Qu'est-ce que la détermination principale du logarithme ? Que peut-on dire concernant l'existence d'une primitive de $1/z$?

▶ $\boxed{\textsc{Exercice 20}}$ On rappelle : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

1. Calculer $\int_{\Gamma} e^{-z^2}\,dz$ où Γ est le circuit (fermé) orienté constitué des segments reliant successivement les points $R, R+\mathrm{i}a, -R+\mathrm{i}a, -R$ (et retour en R) où $R>0, a>0$.
2. Etudier ce qui se passe lorsque $R \to +\infty$ et prouver que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2}\,dx$ ne dépend pas de a.
3. En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos ax\,dx$

▶ $\boxed{\textsc{Exercice 21}}$ Calculer :

1. $\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2-4z+4}{z+\mathrm{i}}\,dz$ où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre 0 et de rayon 2 orienté dans le sens des θ croissants.
2. $\int_{\mathcal{C}} \frac{z}{z^2+9}\,dz$ où $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z-2\mathrm{i}| = 4\}$ orienté positivement (orienté dans le sens des θ croissants).
3. $\int_{\mathcal{C}} \frac{z+1}{z^4+2\mathrm{i}z^3}\,dz$ où $\mathcal{C}$ est le cercle unité orienté positivement .
4. $\int_{\mathcal{C}} \frac{z^3+3}{z(z-\mathrm{i})^2}\,dz$ où $\mathcal{C}$ est un circuit en 8 qui entoure les points i et 0 dans chacune de ses boucles (voir dessin ci dessous).



▶ $\boxed{\textsc{Exercice 22}}$ Calculer :

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos kx}{1+x^2}\, dx$
3. $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} \quad (n \geq 2)$
4. $\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^3}\, dx$
5. $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x(1+x^n)}\, dx \quad (n \in \mathbb{N}^*, 0 < \alpha < 1)$

Exercice 23

1. (a) Définir un domaine du plan complexe dans lequel la notation $\sqrt{1-z^2}$ représente une fonction holomorphe prenant la valeur 1 au point $z=0$.
   (b) Définir un domaine du plan complexe dans lequel la notation $f(z) = \ln\{\mathrm{i}z + \sqrt{1-z^2}\}$ représente une fonction holomorphe.
2. (a) Calculer $f'(z)$.
   (b) Calculer l'intégrale $I = \int_0^i \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ prise le long du chemin joignant 0 à i.

Exercice 24 Calculer l'intégrale :

$$I = \int_D \frac{dz}{2-\cos(z)}$$

dans laquelle z est une variable complexe et le chemin D est un segment de droite représenté dans la figure ci-dessous joignant les points $\mathrm{i}\ln 3$ et $\mathrm{i}\ln 3 + 2\pi$.

On fait le changement de variable $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$.

1. Montrer qu'on est ramené au calcul de l'intégrale :

$$I = k\int_C \frac{du}{u^2-4u+1}$$

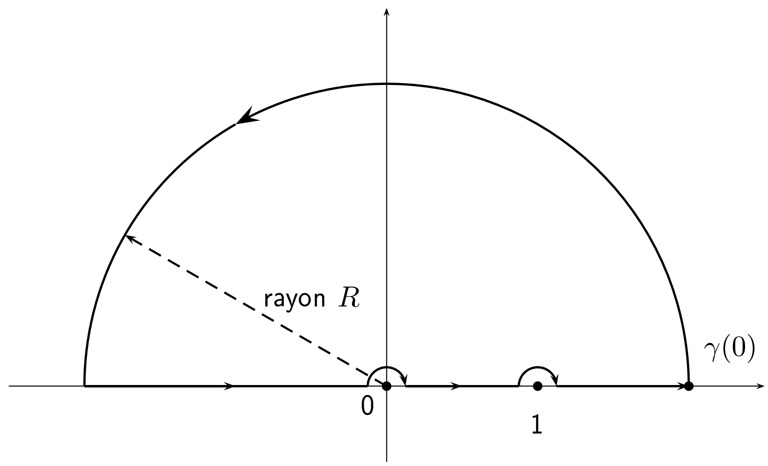
   k étant une constante complexe que l'on déterminera, et C étant un chemin décrivant un cercle centré à l'origine et dont le rayon R sera à déterminer.
2. En utilisant le théorème des résidus, calculer la valeur de cette intégrale.

Exercice 25 Soit α un nombre réel compris entre 0 et 1 et soit $f(z)$ la fonction

$$f(z) = \frac{\ln(1-z)}{z^{1+\alpha}}$$

Intégrer cette fonction sur le chemin représenté ci-dessous et en déduire les valeurs des intégrales :

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x+1)}{x^{1+\alpha}}dx \quad \int_0^\infty \frac{\ln|1-x|}{x^{1+\alpha}}dx$$


rayon R
$\gamma(0)$
0
1

Troisième partie

Séries de Fourier et espaces de Hilbert

Rappel des points essentiels.

a) Projection sur un sous espace fermé, décomposition sur une base, Théorème de Parseval.

b) L'espace L_2 est de Hilbert, L_1 et L_∞ sont de Banach.

c) Les fonctions continues à support compact sont denses dans L_1, L_2.

▶ **Exercice 26** Déterminer la série de Fourier de la fonction périodique de période 2π définie par $f(x) = x^2$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$. En déduire la somme des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

▶ **Exercice 27** Soit f la fonction impaire et 2π-périodique définie par $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ si $x \in]0, \pi[$, et soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x+1) - f(x-1)$.

1. Déterminer les séries de Fourier de f et de g.
2. En déduire que $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2 n}{n^2}$.

Exercice 28 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et 2π-périodique.

1. Démontrer que $(c_n(f))$ tend vers 0 lorsque $|n|$ tend vers $+\infty$.
2. On suppose que f est C^k. Établir une relation entre les coefficients de Fourier de f et ceux de $f^{(k)}$.
3. En déduire que si f est de classe C^∞, alors $c_n(f) = o(1/n^k)$ pour tout entier k.
4. Réciproquement, on suppose que $c_n(f) = o(1/n^k)$ quand $|n| \to +\infty$ pour tout entier k et on pose $S(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$.
   (a) Calculer les coefficients de Fourier de S.
   (b) Démontrer que S est de classe C^∞.
   (c) En utilisant le théorème de Parseval, démontrer que deux fonctions continues qui ont les mêmes coefficients de Fourier sont égales.
   (d) En déduire que $f = S$ et donc que f est de classe C^∞.
5. Quel théorème a-t-on démontré dans cet exercice ?

Exercice 29 Soit $\mathcal{H} = L^2_{\mathbb{R}}([0, 2\pi])$ et soit A l'opérateur défini par :

$$\forall x \in \mathcal{H} \qquad (Ax)(t) = \int_0^{2\pi} \cos(t-s)x(s)\, ds$$

On a donc le produit scalaire suivant, avec sa norme associée :

$$\langle x, y\rangle = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)\, dt \qquad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

1. Montrer que A est auto-adjoint.
2. Montrer que A est borné et que l'on a : $|||A||| \leq \pi\sqrt{2}$.
   (On rappelle que $|||A||| = \sup_{x\in\mathcal{H}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$).

3. On représente $x \in \mathcal{H}$ par sa série de Fourier :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

Donner l'expression de Ax en fonction des coefficients de Fourier.

4. En déduire $|||A|||$.

Exercice 30 Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert des fonctions périodiques, de période 1, et de carré intégrables sur l'intervalle [0,1]. Soit $\phi \in \mathcal{H}$ la fonction définie par :

$$\phi(t) = t - \frac{1}{2} \quad t \in [0,1]$$

Si $f \in \mathcal{H}$, on pose

$$(Kf)(t) = \int_0^1 \phi(t-s) f(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Vérifier que $Kf \in \mathcal{H}$ et que K est un opérateur linéaire continu.
2. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de la série de Fourier de f :

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$$

avec $e_n(t) = \exp(\mathrm{i}2\pi nt)$. Calculer les coefficients de Fourier de Kf en fonction des c_n.

Exercice 31 On considère deux fonctions mesurables

$$Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q \quad \text{et} \quad X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$$

avec $\int Y(t)^T Y(t) dt < \infty$ et $\int X(t)^T X(t) dt < \infty$. On considère le produit scalaire défini sur l'espace des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$,

$$< U, V >= \int U^T(t) V(t) dt$$

et on veut projeter orthogonalement X sur le sous-espace (fermé) $\mathcal{H} = \{t \mapsto AY(t); A \in \mathcal{M}(p,q)\}$ des combinaisons linéaires des coordonnées de Y. On notera ce projeté $\hat{X}(t) = \hat{A}Y(t)$.

1. Montrer que pour tout $B \in \mathcal{M}(p,q)$,

$$\int (X(t) - \hat{A}Y(t))^T BY(t) dt = 0$$

2. En choisissant des matrices B particulières, montrer que

$$\int Y(t)(X(t) - \hat{A}Y(t))^T dt = 0$$

3. On suppose que la matrice $\left[\int Y(t)Y(t)^T dt\right]$ est inversible. Déduire de la question précédente l'expression de $\hat{A}$ puis montrer que

$$\hat{X}(t) = \left[\int X(s)Y(s)^T ds\right] \left[\int Y(t)Y(t)^T dt\right]^{-1} Y(t)$$

Comparer avec l'expression de la projection orthogonale de U sur $\mathbb{R}V$ où U et V sont deux vecteurs appartenant au même espace de Hilbert.

EXERCICE 32 E désigne l'espace préhilbertien des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0,1]$, muni du produit scalaire :

$$< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt \quad \text{pour} f, g \in E$$

1. Montrer qu'on définit un opérateur continu (borné) autoadjoint T de E par :

$$Tf(x) = \int_0^x tf(t)dt + \int_x^1 xf(t)dt \quad (f \in E,\ x \in [0,1])$$

2. Montrer que, pour tout $f \in E$, Tf est deux fois continûment dérivable et calculer $\frac{d^2}{dx^2}(Tf)$; caractériser l'image de T.

EXERCICE 33 Soit $\mathrm{L}_2(0,1)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de carré sommable sur $[0,1]$. On considère le sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}_2(0,1)$ constitué de l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$. Montrer que cet espace n'est pas complet (au sens de la convergence en norme L_2). On pourra considérer la suite (f_n) :

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n^3} \\ x^{-1/3} & \text{si } 1/n^3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

EXERCICE 34 Soit $E = \mathrm{L}_2([0,1])$ l'espace préhilbertien des fonctions continues de $[0,1]$ de module carré intégrable dans $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire usuel :

$$(f, g) = \int \overline{f(x)}g(x)dx \quad (f, g \in E)$$

On pose $u(f) = \int_0^a x^2 f(x)dx$ avec $0 < a < 1$.

1. Montrer que u est une forme linéaire continue sur E. Calculer sa norme.
2. Montrer qu'il existe $g \in E$ telle que $u(f) = (g, f)$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de vecteur $g \in E$ tel que $u(f) = (g, f)$ pour tout $f \in E$.

EXERCICE 35 Soit E l'espace préhilbertien de l'exercice précédent. On pose :

$$Pf(t) = \int_0^t f(s)ds, \quad f \in E,\ t \in [0,1]$$

1. Montrer que $|Pf(t)|^2 \leq t\|f\|^2$. En déduire que P est un opérateur continu de E dans E et que $\|P\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Prouver l'existence de l'adjoint P^* de P. Démontrer la relation

$$(PP^*f)(t) = \int_0^1 \min(s,t)f(s)ds.$$

3. Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de l'opérateur PP^*.

EXERCICE 36 Soient E un espace de Hilbert et $A : E \to E$ un opérateur autoadjoint continu. On désigne par $A \pm \mathrm{i}$ les opérateurs $x \mapsto Ax \pm \mathrm{i}x$ $(x \in E)$.

1. Calculer $\|Ax \pm \mathrm{i}x\|^2$; en déduire que les opérateurs $A \pm \mathrm{i}$ sont injectifs.

2. On pose $R(A \pm i) = \{Ax \pm \mathrm{i}x,\ x \in E\}$. Montrer que si $z \in E$ et est orthogonal à $R(A \pm i)$ alors $z = 0$. En déduire que les sous espaces vectoriels $R(A \pm i)$ sont denses dans E.
3. Montrer que $R(A \pm i) = E$ (Soit $y \in E$, considérer la suite $(y_n)_{n>0}$ appartenant à $R(A+i)$ qui converge vers y).
4. A l'aide des résultats précédents, montrer que les opérateurs $(A+\mathrm{i})^{-1}$ et $(A-\mathrm{i})^{-1}$ existent et sont continus.
5. On pose $U = (A-\mathrm{i})(A+\mathrm{i})^{-1}$, U s'appelle la transformée de *Cayley* de A. Montrer que U est un opérateur unitaire.
6. Vérifier et justifier l'égalité : $A = \mathrm{i}(1+U)(1-U)^{-1}$.
7. Soit $E = \mathrm{L}_2(0,1)$ et $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la correspondance qui à tout $f \in E$ associe la fonction φf définit un opérateur autoadjoint A dans E. Déterminer la transformée de Cayley de A.

Exercice 37 On définit $g_k(t) = \mathbf{1}_{]0,1[}(t-k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que les fonctions g_k sont orthonormées pour le produit scalaire réel usuel de $L^2(\mathbb{R})$.
2. Quelle est la meilleure approximation $\tilde{f}$ d'une fonction f de $L^2(\mathbb{R})$ par une fonction de l'espace engendrée par $\{g_0, g_1, \dots, g_N\}$?
3. La famille $(g_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est-elle une base orthonormée de $L_2(\mathbb{R})$?
4. La famille à deux indices $\mathbf{1}_{]0,1[}(2^{-n}t-k)$ est-elle une famille orthonormée ? Est-elle totale dans $L^2(\mathbb{R})$?

Quatrième partie

Transformation de Fourier

Rappel des points essentiels.

a) Transformée de Fourier dans L_1, Lemme de Riemann-Lebesgue.
b) Différents théorèmes permettant d'inverser la transformée de Fourier.
c) Différentes propriétés sur la transformée de Fourier, notamment lien entre rapidité de décroissance de f (resp. $\tilde{f}$) et régularité de $\tilde{f}$ (resp. f).
d) Espace de Schwartz $\mathcal{S}$: la transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ puis comme $\mathcal{S}$ est dense dans L_2, cela permet de définir la transformée de Fourier dans L_2 en utilisant une certaine isométrie.
e) Formule de la transformée de Fourier d'une fonction dans L_2 et pas dans L_1.
f) La transformée de Fourier échange produit de convolution et produit de fonctions.

▶ **Exercice 38** On note $\mathcal{F}$ l'opérateur de transformation de Fourier. Dans tout l'exercice, on veillera à préciser le cadre fonctionnel des transformées que l'on écrira.

1. Calculer la transformée de Fourier de $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2. En déduire les transformées de Fourier de :
$$g_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq A/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad g_{A,b}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x-b| \leq A/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. Calculer la transformée de Fourier de $h(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
4. Calculer $\mathcal{F}\left[\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2\right]$ et en déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 dx$.
5. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^3 dx$.
6. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{\pi x} dx$ (préciser la définition).
7. Calculer $\mathcal{F}\left[\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right]$ et retrouver $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 dx$ (en utilisant un résultat différent de celui utilisé précédemment).
8. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^4 dx$.

▶ **Exercice 39** Soit $a \in]0, +\infty[$. On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f_a(x) = \mathrm{e}^{-ax} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$$
et
$$\phi_k(x) = \frac{x^k}{k!} f_a(x) \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}$$
où $x \mapsto \mathbf{1}_A(x)$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A.

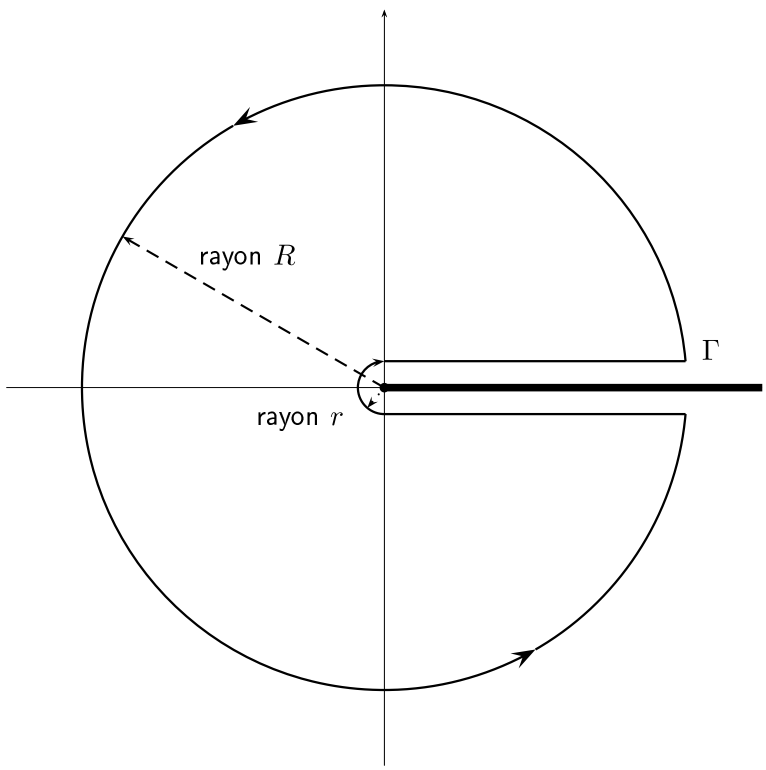
1. On rappelle que la transformée de Fourier $\mathcal{F}_{[f]}$ d'une fonction $f \in L_1(\mathbb{R})$ est définie par :
$$\mathcal{F}_{[f]}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\nu x} dx.$$
Calculer $\mathcal{F}_{[f_a]}$, et en déduire $\mathcal{F}_{[\phi_k]}$. Justifier vos calculs.

2. Soit la fonction g_a définie par $g_a(x) = f_a(x) + f_a(-x)$. Déterminer $\mathcal{F}_{[g_a]}$ et en déduire la valeur de l'intégrale
$$\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}dx \quad \text{où } \omega \in \mathbb{R}.$$
3. Soit la fonction h_a définie sur $\mathbb{R}$ par
$$h_a(x) = f_a(x) - f_a(-x).$$
Déterminer $\mathcal{F}_{[h_a]}$.

► $\boxed{\textsc{Exercice 40}}$ En utilisant les propriétés de dérivation des transformées de Fourier, établir une équation différentielle vérifiée par la transformée de Fourier $\tilde{f}$ de la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$.

Intégrer cette équation différentielle et en déduire que $\tilde{f}(\nu) = K\mathrm{e}^{-\pi\nu^2}$. Montrer alors les deux relations suivantes
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}dx = 1 \quad \text{et} \quad \tilde{f}(\nu) = \mathrm{e}^{-\pi\nu^2}.$$
En déduire le produit de convolution $\mathrm{e}^{-ax^2} * \mathrm{e}^{-bx^2}$.

Exercice 41 Calculer l'intégrale $I = \int_\Gamma \frac{z^{-\frac{1}{2}(1+\mathrm{i}\omega)}}{1+z}dz$ où Γ est le contour représenté sur la figure et où $\omega \in \mathbb{R}$.



En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos\omega t}{\mathrm{ch} t}dt$ puis l'expression de la transformée de Fourier $\tilde{\varphi}(\nu)$ de $\varphi(t) = 1/\mathrm{ch}(\pi t)$. Conclusion ?

Exercice 42 1. Soit l'application $f = \mathbf{1}_{[-1,1]}$.

(a) Calculer la transformée de Fourier $\tilde{f}$. En déduire la valeur de l'intégrale $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$.

(b) Déterminer une application $g \in \mathrm{L}_1$ telle que $\tilde{g}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$. En déduire la valeur des intégrales $I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 dt$ et $I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt$.

2. Soit un réel $a > 0$ et l'application $g_a(x) = \exp(-a|x|)$.
   (a) Calculer sa transformée de Fourier $\tilde{g_a}$.
   (b) En déduire la valeur de l'intégrale
   $$J_a(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{a^2 + t^2} dt, \quad \text{où } x \in \mathbb{R}.$$
   (c) Déterminer les transformées de Fourier des applications h et φ définies sur $\mathbb{R}$ par
   $$h(x) = \frac{1}{5 - 6x + 9x^2} \quad \text{et} \quad \varphi = g_a * g_b, \quad \text{où } b > 0.$$
   En déduire l'expression de $\varphi(x)$ dans le cas où $a \neq b$.
3. Evaluer l'intégrale $K = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-at} \frac{\sin t}{t} dt$ où $a > 0$.

Exercice 43 On considère dans cet exercice la transformée de Fourier d'une fonction dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que

1. Si f est à valeurs réelles et paire, il en de même de $\widehat{f}$.
2. Si f est à valeurs réelles et impaire, alors $\widehat{f}$ prend des valeurs imaginaires pures et est impaire.
3. Si $g(x) = f(x + a)$ ($a \in \mathbb{R}$ fixé) alors $\widehat{g}(\nu) = e^{i2\pi a\nu} \widehat{f}(\nu)$.
4. Si $g(x) = e^{i2\pi bx} f(x)$ ($b \in \mathbb{R}$ fixé), alors $\widehat{g}(\nu) = \widehat{f}(\nu - b)$.
5. Si $g(x) = f(\lambda x)$ ($\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ fixé), calculer $\widehat{g}(\nu)$ en fonction de $\widehat{f}(\nu)$.
6. On note $Cf = \overline{f}$ et $g = Zf(t) = f(-t)$. Calculer $\widehat{g}$.

Exercice 44 Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = \sin(2\pi x)\mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(x)$ ($\mathbf{1}$ désigne la fonction caractéristique). En déduire la transformée de Fourier de $g(x) = \sin(\pi x)/(1 - x^2)$.

Exercice 45 Déterminer les transformées de Fourier des fonctions $f(x) = 1/(2 + x^4)$ et $g(x) = x/(2 + x^4)$. (On pourra utiliser le théorème des résidus.)

Exercice 46 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction *à support compact.*

— On note $u_n = \int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\, dx$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{R}_+$ telles que $|u_n| \leq ab^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En déduire que $\widehat{f}$ est analytique sur $\mathbb{R}$.

— Quelles sont les fonctions à support compact dont la transformée de Fourier est aussi à support compact ?