Sorbonne Université

M2 "Probabilité et Modèles Aléatoires"

Rapport de mémoire

Limite de Grande Échelle de Processus de Hawkes

Auteur : Xavier Erny
Encadrantes :
— Eva Löcherbach, Université de Cergy-Pontoise, Laboratoire "Analyse, Géométrie et Modélisation"
— Dasha Loukianova, Université d'Evry Val d'Essonne, Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Evry

Table des matières

Introduction

Les processus de Hawkes sont utilisés pour modéliser des phénomènes dans divers domaine, comme les neurosciences, les finances, la génomique, la sisméologie. Le but de ce mémoire est d'étudier des systèmes de processus de Hawkes en interaction, quand le nombre de processus tend vers l'infini.

Commençons par détailler très brièvement le fonctionnement d'un système neuronal, afin de comprendre l'intérêt des processus de Hawkes d'un point de vue de la modélisation. Les neurones communiquent entre eux en s'envoyant des décharges via leurs synapses. L'instant où un neurone envoie une décharge à ses voisins dans le réseau neuronal est déterminé par son potentiel de membrane, plus ce dernier est élevé, plus le neurone a tendance a envoyé une décharge. Quand un neurone reçoit une décharge d'un de ses voisins, son potentiel est modifié.

Les instants de décharge sont donc une information importante de l'activité neuronale. L'ensemble des instants de décharge d'un neurone i est modélisé par un processus ponctuel Z_i sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire Z_i est une mesure de comptage aléatoire). Les processus Z_i seront définis comme des processus de Hawkes en interaction, c'est-à-dire des processus ponctules admettant des intensités stochastiques de la forme :

$$\lambda_i(t) = f_i\left(\sum_{j=1}^{N}\int_{]-\infty,t[} h_{ji}(t-s)dZ_j(s)\right) \tag{1}$$

Dans cette formule, il faut interpréter l'expression $X_{i,t} = \sum_{j=1}^{N}\int_{]-\infty,t[} h_{ji}(t-s)dZ_j(s)$ comme le potentiel de membrane du neurone i à l'instant t, l'intégrale $\int_{]-\infty,t[} h_{ji}(t-s)dZ_j(s)$ représente l'influence que les décharges du neurone j ont sur le potentiel du neurone i (Z_j est une mesure de comptage qui compte les instants de décharge du neurone j). La fonction f_i est la fonction qui donne le taux de décharge du neurone i en fonction de son potentiel.

Il apparait alors clairement comment les processus de Hawkes peuvent simuler une activité neuronale, et plus généralement, divers phénomènes liés à des interactions d'inhibition et/ou d'excitation mutuelle entre particules.

Dans ce mémoire, la problématique à laquelle on va s'intéresser est la convergence des systèmes $(Z_1, \ldots, Z_N)$ donnés par la formule (1) quand N tend vers $+\infty$. Le but sera donc de caractériser le système limite (c'est-à-dire le système obtenu en prenant la limite formelle). Les cas auxquels on s'intéressera seront ceux dans lesquels on suppose que tous les neurones sont similaires, c'est-à-dire le cas où les fonctions h_{ji} et f_i de (1) ne dépendent ni de i ni de j, mais uniquement de N.

Ce mémoire s'articule en trois parties. Dans la partie I, on introduit la théorie des processus ponctuels, les sous-sections $I.A$ et $I.B$ présentent les définitions et généralités sur les processus et introduisent les processus de Poisson (ces sous-sections sont inspirées de [Duquesne, 2017]). Dans les sous-sections $I.C$ et $I.D$, on étudie le cas des processus ponctuels sur $\mathbb{R}$ et la notion d'intensité stochastique ([Brémaud, 1981]). La partie II est consacrée à l'étude des processus de Hawkes, notamment aux résultats permettant de les construire et de les manipuler ([Brémaud et Massoulié, 1996]). Dans la partie III, on s'intéresse à la convergence des systèmes de processus de Hawkes. Dans la partie $III.A$, on étudie le cas d'interaction de type champ moyen, on présente essentiellement les résultats de [Delattre *et al.*, 2014]. La partie $III.B$ est consacrée à l'étude de la convergence dans un régime diffusif, elle s'appuie sur [Löcherbach, 2017].

I Processus Ponctuel

Dans toute cette partie, E désignera un espace métrique, complet et séparable, que l'on munira de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$, et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet.

Informellement, un processus ponctuel sur un E est un ensemble dénombrable aléatoire de points de E. On peut représenter un tel processus de deux manières :

— l'ensemble des points $T = \{T_n \in E \ : \ n \in \mathbb{N}\}$

— la mesure de comptage $Z_T = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{T_n}$ des points du processus

I.A Généralités sur les Processus Ponctuels

Soit $\mathbb{D}(E)$ l'ensemble des parties dénombrables de E. Pour $B \in \mathcal{B}(E)$, on définit la fonction $Z_\bullet(B)$:

$$Z_\bullet(B) : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{D}(E) & \longrightarrow & \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \\ T & \longmapsto & Z_T(B) = |T \cap B| \end{array} \right. \tag{2}$$

Il faut comprendre la définition de $Z_T(B)$ de la manière suivante : étant donné une partie dénombrable T de E, et un borélien B de E, $Z_T(B)$ compte le nombre de points de T qui sont dans B.

On munit $\mathbb{D}(E)$ de la tribu $\mathcal{D}(E)$ engendrée par les applications $Z_\bullet(B)$ $(B \in \mathcal{B}(E))$.

Définition I.A.1 (processus ponctuel) :

On dit que $T : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{D}(E), \mathcal{D}(E))$ est un processus ponctuel à valeurs dans E si T est mesurable.

Dans la suite, s'il n'y a pas d'ambiguité, on notera Z au lieu de Z_T, et on identifiera $T = \{T_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ et $Z = (Z(B))_{B \in \mathcal{B}(E)}$, ie on écrira parfois "soit $Z = (T_n)_n$ un processus ponctuel".

Définition I.A.2 (mesure intensité) :

Soit T un processus ponctuel sur E.

On appelle la mesure intensité de T, la fonction $\mu : B \in \mathcal{B}(E) \longmapsto \mathbb{E}\left[Z_T(B)\right] \in [0, +\infty]$

Lemme I.A.3 :

Soit T un processus ponctuel sur E, alors sa mesure intensité μ est une mesure sur $(E, \mathcal{B}(E))$

preuve :

Il est clair que $\mu(\varnothing) = 0$

Par ailleurs, si on prend $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de boréliens deux à deux disjoints, il est clair que

$$Z\left(\bigcup_n B_n\right) = \sum_n Z(B_n) \tag{3}$$

D'où $\mu\left(\bigcup_n B_n\right) = \sum_n \mu\left(B_n\right)$

■

Dans la suite, on parlera parfois d'intensité plutôt que de mesure intensité.

Définition I.A.4 :

Soit Z un processus ponctuel sur E. On dit que :

— Z est fini si $Z(E) < +\infty$ ps

— Z est localement fini si pour tout $B \in \mathcal{B}(E)$ borné, $Z(B) < +\infty$ ps

Lemme I.A.5 :

Soient Z_i $(i \in I)$ des processus ponctuels sur E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

— $(Z_i)_{i \in I}$ est une famille indépendante

— pour tout $B_1, \ldots, B_p \in \mathcal{B}(E)$ deux à deux disjoints, $(Z_i(B_1), \ldots, Z_i(B_p))_{i \in I}$ est une famille indépendante

I.B Processus Ponctuel de Poisson

Définition I.B.1 (processus ponctuel de Poisson) :

Un processus ponctuel T sur E est dit de Poisson si :

— *pour tout $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(E)$ deux à deux disjoints, $(Z(B_1), \dots, Z(B_n))$ est une famille indépendante*

— *pour tout $B \in \mathcal{B}(E)$, $Z(B)$ suit une loi de Poisson*

On remarque que, si Z est un processus de Poisson de mesure intensité μ, et B un borélien de E, alors $Z(B)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(B)$, puisque le paramètre d'une variable de Poisson est égal à son espérance.

Exemple I.B.2 :

Si $E = \mathbb{R}_+$, considérons $(S_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables iid de loi exponentielle de paramètre $0 < \lambda < +\infty$

On définit par récurrence :

$$\begin{cases} T_1 = S_1 \\ T_{n+1} = T_n + S_{n+1} \end{cases} \tag{4}$$

Et considérons $Z = \{T_n \ : \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Montrons que Z est un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité λdt.

Tout d'abord, le fait que Z est un processus ponctuel vient du fait que,

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall 0 < a < b < +\infty, \{Z([a,b]) = j\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{T_{k-1} < a \leq T_k\} \cap \{T_{k+j-1} \leq b < T_{k+j}\} \in \mathcal{F} \tag{5}$$

Dans l'équation (5), on a posé $T_0 = 0$

Pour montrer la condition d'indépendance, il suffit de montrer que

$$\forall I, J \text{ intervalles disjoints}, Z(I) \text{ et } Z(J) \text{ sont indépendants} \tag{6}$$

Montrons (6). Soient I, J deux intervalles disjoints non-vides, supposons que $I = [a,b]$ et $J = [c,d]$ avec $b < c$. On remarque que $Z_t = Z([0,t])$ définit une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ qui part de 0, et qui saute de n à $n+1$ à taux λ. Soit $K = \inf\{i \geq 1 \ : \ T_i > b\}$. T_K est un temps d'arrêt (par rapport $\mathcal{F}_t = \sigma(Z([0,s]) \ : \ s \leq t))$, puisque $\{T_k \leq t\}$ vaut soit $\varnothing \in \mathcal{F}_t$ si $t \leq b$, soit $\{Z(]b,t]) \geq 1\}$ si $t > b$. On peut donc appliquer la propriété de Markov forte à $(Z_t)_t$ au temps T_K pour obtenir que $Z_{|[T_K,+\infty[}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{T_K}$. Mais, comme $Z([a,b])$ est $\mathcal{F}_{T_K}-$mesurable (puisque $b < T_K$) et que $Z([c,d]) = N([\max(c,T_K), b])$, on a bien l'indépendance entre $Z([a,b])$ et $Z([c,d])$.

Ensuite, remarquons que

$$\forall s \geq 0, (Z([s,s+t[))_{t\geq 0} \text{ a même loi que } (Z([0,t[))_{t\geq 0} \tag{7}$$

En effet, si on fixe $s \geq 0$, soit $K = \min\{k \geq 1 \ : \ T_k \geq s\}$, alors le processus $Z_{|[s,+\infty[}$ est exactement $\{T_n - s \ : \ n \geq K\} = \{(S_K - s) + S_{K+1} + \ldots + S_n \ : \ n \geq K\}$. Or, si S est une variable exponentielle, alors la loi conditionnelle de $S - s$ (conditionnée à $S \geq s$) est exactement la loi (inconditionnelle) de S. Aisni, on voit que le processus $Z_{|[s,+\infty[}$ a même loi que Z. Ce qui suffit pour montrer (7).

Par ailleurs, on a

$$\mathbb{P}\left(Z([0,t[) = 0\right) = \mathbb{P}\left(S_1 \geq t\right) = e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + O(t^2) \tag{8}$$

Et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(Z([0,t[) = 1\right) &= \mathbb{P}\left(S_1 < t \leq S_1 + S_2\right) \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(S_1 < t \leq S_1 + S_2 | \, S_1\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{S_1 < t\}} \lambda e^{-\lambda(t - S_1)}\right] \\ &= \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-x)} e^{-\lambda x} \mathrm{dx} \\ &= \lambda t e^{-\lambda t} \end{aligned} \tag{9}$$

D'où

$$\mathbb{P}\left(Z([0,t[) = 1\right) = \lambda t + O(t^2) \tag{10}$$

De plus, en utilisant (8) et (10), on obtient

$$\mathbb{P}\left(Z([0,t[) \geq 2\right) = O(t^2) \tag{11}$$

Notons $p_j(t) = \mathbb{P}\left(Z([0,t[) = j\right)$, on veut montrer que $p_j(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}$. Cela suffira à démontrer que Z est un processus ponctuel de Poisson d'intensité λdt, puisque, par (7), on saura alors que, pour tout $a \leq b$, $Z([a,b[)$ a même loi que $Z([0,b-a[)$ qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(b-a)$

D'après (8) et (9), on sait déjà que $p_j(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}$ pour $j \in \{0,1\}$. Il suffit donc de montrer le résultat par récurrence sur j.

Soit donc $j \geq 2$ fixé. Montrons que $p_j(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}$

D'après (8), (10) et (11), on a

$$\begin{aligned}
\forall h,t \geq 0, p_j(t+h) &= \mathbb{P}\left(N([0,t+h[) = j\right)\\
&= \sum_{i=0}^{j} \mathbb{P}\left(Z([0,t[) = j-i, Z([t,t+h[) = i\right)\\
&= \sum_{i=0}^{j} \mathbb{P}\left(Z([0,t[) = j-i\right)\mathbb{P}\left(Z([t,t+h[) = i\right)\\
&= \sum_{i=0}^{j} \mathbb{P}\left(Z([0,t[) = j-i\right)\mathbb{P}\left(Z([0,h[) = i\right)\\
&= p_j(t)(1-\lambda h + O(h^2)) + p_{j-1}(t)\lambda h + O(h^2) + O(h^2)
\end{aligned} \tag{12}$$

On a donc $\frac{p_j(t+h)-p_j(t)}{h} = -\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) + O(h)$ où $O(h)$ est uniforme pour t. On voit donc que $t \mapsto p_j(t)$ est dérivable à droite et uniformément continue. Par ailleurs, en posant $s = t+h$, on a $\frac{p_j(s)-p_j(s-h)}{h} = -\lambda p_j(s-h) + \lambda p_{j-1}(s-h) + O(h)$, il s'agit encore d'un $O(h)$ par uniforme continuité de p_j. On voit donc que p_j est aussi dérivable à gauche. On a donc :

$$\forall t \geq 0, p_j'(t) = -\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) \tag{13}$$

De plus, on sait, par hypothèse de récurrence, que $p_{j-1}(t) = \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}e^{-\lambda t}$. En résolvant l'équation différentielle (13), on obtient que $p_j(t)$ s'écrit $p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t} + p_j(0)e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}$

On a donc bien montré que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t} \tag{14}$$

L'exemple I.B.2 est fondamental, puisque tout processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité λdt peut se construire comme dans cet exemple (cf proposition I.C.2).

Dans l'exemple I.B.2, on a construit un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité λdt. Avec une construction similaire (cf (15)), on construit un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}$ d'intensité λdt

$$\begin{cases} T_1 = S_1 \\ \forall n \geq 2, T_n = T_{n-1} + S_n \\ \forall n \leq 0, T_n = T_{n+1} - S_n \end{cases} \tag{15}$$

où $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables iid de loi exponentielle de paramètre λ.

Proposition I.B.3 :

Soit Z un processus ponctuel de Poisson d'intensité μ. Alors

$$Z \text{ est localement fini } \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}(E) \text{ borné, } \mu(B) < +\infty$$

preuve :

Comme $Z(B)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(B)$, on sait que

$$Z(B) < +\infty \ ps \Leftrightarrow \mu(B) < +\infty$$

■

Une conséquence de la porposition I.B.3, est que tout processus de Poisson sur $\mathbb{R}^d$ d'intensité λdt (où $\lambda \in \mathbb{R}_+$) est localement fini.

Définition I.B.4 (Processus ponctuel de Poisson non-homogène) :

Un processus ponctuel Z sur $\mathbb{R}^d$ est un processus ponctuel de Poisson non-homogène d'intensité $\lambda : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ si :

- $\lambda : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ *est mesurable*
- *pour tout $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ deux à deux disjoints, $(Z(B_1), \ldots, Z(B_n))$ est une famille indépendante*
- *pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $Z(B)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\displaystyle\int_B \lambda(x)dx$*

Il y a un abus de notation lorsqu'on parle de l'intensité d'un processus de Poisson non-homogène, il peut s'agir soit de la mesure de la définition I.A.2, soit de la fonction $\lambda : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ de la définition I.B.4. Le contexte déterminera toujours de quelle intensité on parle, puisqu'elles ne sont pas de même nature.

Il est évident qu'un processus de Poisson non-homogène d'intensité $\lambda : t \in \mathbb{R}^d \mapsto \lambda(t)$ est un processus de Poisson (au sens de la définition I.B.1) d'intensité $\mu : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \mapsto \mu(B) = \displaystyle\int_B \lambda(x)dx$.

I.C Processus Ponctuel sur $\mathbb{R}$

Quand on définit un processus ponctuel sur en ensemble E quelconque, on s'intéresse à l'ensemble $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$, mais a priori on ne sait rien sur les T_n individuellement, les points T_n sont indexés arbitrairement.

Un intérêt de se placer sur $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}$) est que l'on peut imposer l'indexation suivante des T_n lorsque le processus est localement fini :

$$\begin{array}{ll} 0 \leq T_0 & (\text{resp. } T_0 < 0 \leq T_1) \\ \forall n \in \mathbb{N}, T_n < T_{n+1} & (\text{resp. } \forall n \in \mathbb{Z}, T_n < T_{n+1}) \end{array} \tag{16}$$

Pour des raisons pratiques, on autorise les T_n à prendre les valeurs $+\infty$ et $-\infty$. Dans ce cas, il faut modifier l'indexation (16) pour n'imposer $T_n < T_{n+1}$ que si $T_n < +\infty$ et $T_{n+1} > -\infty$. Dans la suite, on supposera toujours que les processus ponctuels localement finis $(T_n)_n$ sur $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}$) vérifient :

$$\begin{array}{ll} 0 \leq T_0 & (\text{resp. } T_0 < 0 \leq T_1) \\ \forall n \in \mathbb{N}, T_n \leq T_{n+1} & (\text{resp. } \forall n \in \mathbb{Z}, T_n \leq T_{n+1}) \\ \forall n \in \mathbb{N}, T_n < +\infty \Rightarrow T_n < T_{n+1} & (\text{resp. } \forall n \in \mathbb{Z}, (T_n < +\infty \text{ et } T_{n+1} > -\infty) \Rightarrow T_n < T_{n+1}) \end{array} \tag{17}$$

Proposition I.C.1 :

Soit $Z = (T_n)_n$ un processus ponctuel localement fini sur $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}$) tel que les T_n sont indexés comme dans (17)*.*

Alors, pour tout n, T_n est une variable aléatoire.

Ce sont mêmes des $(\mathcal{F}_t)_t$ temps d'arrêt, où $\mathcal{F}_t = \sigma\left(Z(B) \ : \ B \in \mathcal{B}([0,t])\right)$ (resp. $\mathcal{F}_t = \sigma\left(Z(B) \ : \ B \in \mathcal{B}(]-\infty,t])\right)$)

preuve :

Dans le cas de $\mathbb{R}_+$, il suffit de remarquer que

$$\forall n \geq 0, \{T_n \leq t\} = \{Z([0,t]) \geq n+1\} \in \mathcal{F}_t \tag{18}$$

Dans le cas de $\mathbb{R}$, il faut remarquer que

$$\forall n \geq 1, \{T_n \leq t\} = \{Z([0,t]) \geq n\} \in \mathcal{F}_t \tag{19}$$

et

$$\forall n \leq 0, \{T_n \geq -t\} = \{Z([-t,0]) \geq 1-n\} \in \mathcal{F}_t \tag{20}$$

■

Proposition I.C.2 :

Soit $Z = \{T_n \ : \ n \geq 0\}$ un processus ponctuel sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité λdt (indexés comme dans (17)).

Alors $(T_n - T_{n-1})_{n\geq 0}$ (en posant $T_{-1} = 0$) est une famille iid de variables exponentielles de paramètre λ.

preuve :

Soit $S_n = T_n - T_{n-1}$ $(n \geq 0)$

Montrons d'abord que les S_n suivent des loi exponentielles de paramètre λ

Comme $\mathbb{P}(S_0 > t) = \mathbb{P}(Z([0,t]) = 0) = e^{-\lambda t}$, on sait que S_0 est une variable exponentielle de paramètre λ.

Soit $n \geq 1$. On peut écrire :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(S_n > t) & = & \mathbb{P}(Z(]T_{n-1}, T_{n-1}+t]) = 0) \\ & = & \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(Z(]T_{n-1}, T_{n-1}+t]) = 0 \middle| \mathcal{F}_{T_{n-1}}\right)\right] \\ & = & \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(Z_{|]T_{n-1},+\infty[}(]T_{n-1}, T_{n-1}+t]) = 0 \middle| \mathcal{F}_{T_{n-1}}\right)\right] \end{array} \tag{21}$$

Mais il est simple de voir que $Z_{|]T_{n-1},+\infty[}$ et $Z_{|[0,T_{n-1}]}$ sont indépendants (il suffit d'utiliser la caractérisation d'indépendance des processus ponctuels du lemme I.A.5 et la propriété d'indépendance des processus de Poisson), donc T_{n-1} est indépendant de $Z_{|]T_{n-1},+\infty[}$.

On sait alors que la dernière expression de (21) s'écrit $\mathbb{E}[f(T_{n-1})]$ où $f(x) = \mathbb{P}\left(Z_{|]x,+\infty[}(]x, x+t]) = 0\right) = \mathbb{P}(Z(]0,t] = 0)) = e^{-\lambda t}$.

On trouve bien que S_n est une variable exponentielle de paramètre λ.

Tout ce qu'il reste à montrer, c'est que les variables S_n $(n \geq 0)$ sont indépendantes. Si on prend $k < n$, alors S_k est $\sigma(Z_{|[0,T_k]})-$mesurable, et S_n est $\sigma(Z_{|]T_k,+\infty[})-$mesurable, et comme on a déjà vu que $Z_{|]T_k,+\infty[}$ et $Z_{|[0,T_k]}$ sont indépendants, on sait alors que S_k et S_n sont indépendants.

■

On vient de voir qu'un intérêt de considérer des processus ponctuels sur $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}$), est que l'on peut travailler sur les points du processus, puisque ce sont des variables aléatoires (en imposant l'indexation 17). Un autre intérêt est que l'on peut ramener l'étude d'un processus ponctuel $Z = (Z(B))_{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ à l'étude du processus stochastique $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (resp. $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}}$) défini par :

$$Z_t = Z([0,t]) \text{ si } t \geq 0 \quad \left(resp. \left\{ \begin{array}{rcll} Z_t & = & Z(]0,t]) & \text{si } t > 0 \\ Z_t & = & -Z(]t,0]) & \text{si } t \leq 0 \end{array} \right. \right) \tag{22}$$

Le processus $(Z_t)_t$ est un processus croissant, continue à gauche, constant par morceaux, et qui fait des sauts d'amplitude 1 sur les points du processus ponctuel Z.

Dans la suite, on utilisera la fait que, pour tout $s \leq t$ (même si s ou t est négatif), on a

$$Z_t - Z_s = Z(]s,t])$$

I.D Intensité Stochastique et Prévisibilité

Dans cette sous-section, on ne considère que des processus ponctuels sur $\mathbb{R}$, tous les résultats se généraliseront immédiatement au cas $\mathbb{R}_+$, en restreignant les processus à leurs points sur $\mathbb{R}_+$. La notion d'intensité stochastique d'un processus ponctuel généralise la notion de fonction intensité d'un processus de Poisson non-homogène au cas où la fonction $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ de la définition I.B.4 est un processus stochastique.

L'intensité stochastique dépend de la filtration sur laquelle on travaille. La seule condition que l'on impose à cette filtration est qu'elle soit adaptée au processus, au sens de la définition I.D.1.

Définition I.D.1 (Filtration adaptée) :
Soit Z un processus ponctuel sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est adaptée à Z si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sigma\left(Z(C) \ : \ C \in \mathcal{B}(]-\infty, t])\right) \subseteq \mathcal{F}_t$$

La notion d'intensité stochastique est liée à celle de processus prévisibles.

Définition I.D.2 (Prévisibilité) :
Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ une filtration, on définit la tribu prévisible $\mathcal{P}((\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}})$ sur $\mathbb{R}\times\Omega$ comme la tribu engendrée par les ensembles du type :

$$]r, s] \times A \text{ où } r \leq s \text{ et } A \in \mathcal{F}_r$$

De plus, on dit qu'un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}-$prévisible si l'application $X : (t,\omega) \in \mathbb{R}\times\Omega \mapsto X_t(\omega)$ est $\mathcal{P}((\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}})-$mesurable.

Définition I.D.3 (Intensité Stochastique) :
Soient Z un processus ponctuel sur $\mathbb{R}$, $(\lambda_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un processus $(\mathcal{F}_t)_t-$progressivement mesurable, où $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est une filtration adaptée à Z.
On dit que Z admet λ comme $(\mathcal{F}_t)_t-$ intensité si, pour tout processus positif $(\mathcal{F}_t)_t-$prévisible $(C_t)_{t\in\mathbb{R}}$, on a

$$\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} C_s dZ(s)\right] = \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} C_s \lambda_s ds\right] \tag{23}$$

Il vient tout de suite de la définition I.D.3 que si Z admet une intensité stochastique λ, alors en notant $\mu(A) = \mathbb{E}\left[Z(A)\right]$, on sait que μ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité $t \mapsto \mathbb{E}\left[\lambda(t)\right]$.

Exemple I.D.4 :

Soit π un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}$ d'intensité $\lambda.dt$ (où $\lambda > 0$). Alors π admet comme intensité stochastique (constante) λ.

Il suffit de montrer que, pour tout processus prévisible positif $(C_t)_t$, on a

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} C_s d\pi(s)\right] = \lambda\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} C_s ds\right]$$

Il suffit de le montrer pour les processus de la forme $C_t(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{1}_{]r,s]}(t)$ (le résultat se généralisera par le théorème des classes monotones version fonctionnelle).

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} C_s d\pi(s)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A(\omega)\pi(]r,s])\right] \\
&= \mathbb{P}\left(A\right)\mathbb{E}\left[\pi(]r,s])\right] \quad \text{(cf propriété d'indépendance des processus de Poisson)} \\
&= \mathbb{P}\left(A\right)\lambda(s-r) \\
&= \lambda\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} C_s ds\right]
\end{aligned}$$

Dans la suite, on aura besoin d'une notion de prévisibilité pour les processus indexés sur des ensembles plus généraux que $\mathbb{R}$.

Définition I.D.5 :

Soit $(E,\mathcal{E})$ *un espace mesurable, on dit qu'un processus* $(X_{t,v})_{t\in\mathbb{R},v\in E}$ *est prévisible si* $X:(t,\omega,v)\in\mathbb{R}\times\Omega\times E\mapsto X_{t,v}(\omega)$ *est* $\mathcal{P}((\mathcal{F}_t)_t)\otimes\mathcal{E}-$*mesurable*

On utilise le même mot "prévisible" qu'à la définition I.D.2 car ces deux définitions portent sur des processus différents, et donc il n'y a pas d'ambiguité.

On remarque que les processus $\mathcal{P}((\mathcal{F}_t)_t)\otimes\mathcal{E}-$mesurable sont générés par les processus de la forme :

$$(t,\omega,v)\in\mathbb{R}\times\Omega\times E\mapsto C_t(\omega)\mathbb{1}_B(v) \text{ où } (C_t)_t \text{ est prévisible et } B\in\mathcal{E}$$

Dans la suite, on aura besoin d'un résultat plus général que celui de l'exemple I.D.4

Lemme I.D.6 :

Soient $(E,\mathcal{E},\nu)$ *un espace mesuré et* π *un processus ponctuel de Poisson sur* $\mathbb{R}\times E$ *d'intensité* $dt.d\nu(v)$*. Alors pour tout processus prévisible (au sens de la définition I.D.5) positif* $(C_{t,v})_{t\in\mathbb{R},v\in E}$*, on a*

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}\times E}C_{t,v}d\pi(t,v)\right]=\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}}\int_E C_{t,v}d\nu(v)dt\right]$$

preuve :

Comme dans l'exemple I.D.4, il suffit d'établir le résultat pour des processus qui génèrent les processus prévisibles. On va donc montrer le résultat pour les processus de la forme $C_{t,v}=D_t\mathbb{1}_B(v)$ où $(D_t)_t$ est prévisible (au sens de la définition I.D.2) et $B\in\mathcal{E}$

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}\times E}C_{t,v}d\pi(t,v)\right]=\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}\times B}D_t d\pi(t,v)\right]$$

On introduit $\widetilde{\pi}_B(A)=\pi(A\times B)$ (pour $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Il est clair que $\widetilde{\pi}_B$ est un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\nu(B)dt$. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}\times E}C_{t,v}d\pi(t,v)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}}D_t d\widetilde{\pi}_B(t)\right]\\ &= \nu(B)\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}}D_t dt\right] \qquad \text{(cf exemple I.D.4)}\\ &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}}\int_E C_{t,v}d\nu(v)dt\right]\end{aligned}$$

■

Théorème I.D.7 :

Soit Z *un processus ponctuel admettant* $(\lambda_t)_t$ *comme* $(\mathcal{F}_t)_t-$*intensité.*

Supposons que pour tout $a<b$, $\int_a^b\lambda_s ds<+\infty$ *ps.*

Alors Z *est localement fini, et* $M_t=Z_t-\displaystyle\int_0^t\lambda_s ds$ *est une* $(\mathcal{F}_t)_t-$*martingale locale (où* Z_t *est défini à (22) et* $\int_a^b\ldots=-\int_b^a\ldots$*)*

preuve :

Montrons d'abord que Z est localement fini.

Soit $S_n^+=\inf\left\{t\geq 0\ :\ \displaystyle\int_0^t\lambda_s ds\geq n\right\}$ (où $\inf\varnothing=+\infty$) et $S_n^-=\sup\left\{t<0\ :\ \displaystyle\int_t^0\lambda_s ds\geq n\right\}$ (où $\sup\varnothing=-\infty$). Comme $\displaystyle\int_0^t\lambda_s ds<+\infty$ ps pour tout t, on sait que $S_n^+\nearrow+\infty$ ps et que $S_n^-\searrow-\infty$ ps.

Soit $C_t = \mathbb{1}_{\{S_n^- < t \leq S_n^+\}}$, comme $(C_t)_t$ est continue à gauche presque sûrement, on sait que $(C_t)_t$ est $(\mathcal{F}_t)_t-$prévisible, on peut donc appliquer (23) pour avoir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Z(]S_n^-, S_n^+])\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{S_n^-}^{S_n^+} \lambda_s ds\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^{S_n^+} \lambda_s ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_{S_n^-}^{0} \lambda_s ds\right] \\ &\leq 2n < +\infty\end{aligned} \tag{24}$$

On sait donc que $Z(]S_n^-, S_n^+]) < +\infty$ presque sûrement pour tout $n \geq 1$. Comme, on sait de plus que S_n^- tend vers $-\infty$ et que S_n^+ tend vers $+\infty$, on a bien que Z est localement fini.

Montrons maintenant que $M_t = Z_t - \displaystyle\int_0^t \lambda_s ds$ est une $(\mathcal{F}_t)_t-$martingale locale.

Comme les S_n^+ sont des $(\mathcal{F}_t)_t-$temps d'arrêt, il suffit de montrer que $(M_{t\wedge S_n^+})_t$ est une (vraie) martingale.

Soient donc $a < b$, et soit $A \in \mathcal{F}_a$. Soit $C_t = \mathbb{1}_A.\mathbb{1}_{\{a\wedge S_n^+ < t \leq b \wedge S_n^+\}} = \mathbb{1}_{A\cap\{t\leq S_n^+\}}.\mathbb{1}_{\{a<t\leq b\}}$. Comme $(C_t)_t$ est continue à gauche presque sûrement, pour montrer que $(C_t)_t$ est $(\mathcal{F}_t)_t-$prévisible, il suffit de montrer que $(C_t)_t$ est $(\mathcal{F}_t)_t-$adapté. Or si $t > a$, C_t est clairement $\mathcal{F}_t-$mesurable (puisque $A \in \mathcal{F}_a \subseteq \mathcal{F}_t$), et si $t \leq a$, $C_t = 0$. Comme $(C_t)_t$ est $(\mathcal{F}_t)_t-$prévisible, on peut appliquer (23) :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A Z(]a \wedge S_n^+, b \wedge S_n^+])\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \int_{a\wedge S_n^+}^{b\wedge S_n^+} \lambda_s ds\right]$$

Ce qu'on peut réécrire en

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A Z_{b\wedge S_n^+}\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A Z_{a\wedge S_n^+}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \int_0^{b\wedge S_n^+} \lambda_s ds\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \int_0^{a\wedge S_n^+} \lambda_s ds\right]$$

L'égalité ci-dessus a bien un sens, car toutes les quantités sont finis.

Finalement, on obtient exactement que

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A M_{b\wedge S_n^+}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A M_{a\wedge S_n^+}\right]$$

Ceci étant vrai pour tout $A \in \mathcal{F}_a$, on a bien montré que $(M_{t\wedge S_n^+})_t$ est une martingale, et comme $(S_n)_n$ est une suite croissante de temps d'arrêts qui tend vers $+\infty$ presque sûrement, on a finalement bien montré que $(M_t)_t$ est une martingale locale.

■

Théorème I.D.8 :

Soit Z un processus ponctuel admettant une $(\mathcal{F}_t)_t-$intensité λ telle que $\forall a < b, \displaystyle\int_a^b \lambda_s ds < +\infty$ ps.

On a alors

$$\forall a < b, \quad \mathbb{E}\left[Z(]a, b])\middle|\, \mathcal{F}_a\right] = \mathbb{E}\left[\int_a^b \lambda_s ds \middle|\, \mathcal{F}_a\right] \tag{25}$$

preuve :

Soient $a < b$. Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ une suite de temps d'arrêt croissante qui tend vers $+\infty$ presque sûrement telle que, pour tout $n \geq 1$, $M_{t\wedge S_n} = Z_{t\wedge S_n} - \displaystyle\int_0^{t\wedge S_n} \lambda_s ds$ est une (vraie) martingale.

On sait alors que, pour tout n,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{b\wedge S_n}\middle|\mathcal{F}_a\right] &= \mathbb{E}\left[M_{a\wedge S_n}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[M_{a\wedge S_n}\middle|\mathcal{F}_a\right]\end{aligned} \tag{26}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Z_{b\wedge S_n} - Z_{a\wedge S_n}\middle|\mathcal{F}_a\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{a\wedge S_n}^{b\wedge S_n} \lambda_s ds \middle| \mathcal{F}_a\right] \\ \mathbb{E}\left[Z(]a\wedge S_n, b\wedge S_n])\middle|\mathcal{F}_a\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{a\wedge S_n}^{b\wedge S_n} \lambda_s ds \middle| \mathcal{F}_a\right]\end{aligned} \tag{27}$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer le théorème de convergence monotone (version conditionnelle). Ce théorème est bien applicable, puisque les les variables $Z(]a\wedge S_n, b\wedge S_n])$ et $\int_{a\wedge S_n}^{b\wedge S_n} \lambda_s ds$ sont positives et croissantes en n, car $(S_n)_n$ est une suite croissante. ∎

Proposition I.D.9 (Changement de filtration) :
Soit Z un processus admettant $(\lambda_t)_t$ comme $(\mathcal{F}_t)_t-$intensité. Soit $(\mathcal{G}_t)_t$ une filtration telle que $\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{F}_t$ est indépendante de $\mathcal{G}_t$.
Alors Z admet $(\lambda_t)_t$ comme $(\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_t)_t-$intensité

II Processus de Hawkes

Informellement, un processus de Hawkes est un processus ponctuel sur $\mathbb{R}$ qui admet une intensité stochastique λ telle que $\lambda(t)$ dépend du processus restreint à $]-\infty, t[$. Autrement dit, s'il y a un point du processus à un instant t, ce point va modifier les valeurs de l'intensité après t. On verra deux notions de processus de Hawkes : les processus de Hawkes dont la dynamique est défini sur $\mathbb{R}$, et ceux dont la dynamique est défini sur $\mathbb{R}_+$ et dont le comportement sur $\mathbb{R}_-$ sera imposé par ce qu'on appellera une condition initiale.

II.A Définitions

Définition II.A.1 (Processus de Hawkes isolé avec condition initiale) :
Soit Z un processus ponctuel sur $\mathbb{R}$ admettant une $(\mathcal{F}_t)_t-$intensité $(\lambda(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ sur $\mathbb{R}_+$, et soit $\mathcal{P}$ un prédicat sur les processus ponctuels sur $\mathbb{R}_-$ (ie $\mathcal{P}$ est un fonction prenant en argument un processus ponctuel sur $\mathbb{R}_-$, et renvoyant vrai ou faux). On dit que Z est un $(\mathcal{F}_t)_t-$processus de Hawkes de condition initiale $\mathcal{P}$ si :

$$\begin{cases} \mathcal{P}\left(Z_{|\mathbb{R}_-}\right) \text{ est vrai} \\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \lambda_t = f\left(\int_{]-\infty,t[} h(t-s)dZ(s)\right)\end{cases}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ et $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

Dans la suite, on utilisera un seul type de prédicats : le prédicat $\mathcal{P}_{vide}$ défini par $\mathcal{P}_{vide}(\mu) =$ "$\mu = \varnothing$", ce qui impose que le processus de Hawkes n'a aucun point sur $\mathbb{R}_-$. On peut imaginer d'autres types de prédicat, par exemple, on pourrait fixer Z_- une mesure (déterministe) de comptage définie sur $\mathbb{R}_-$, et considérer $\mathcal{P}(\mu) =$ "$\mu = Z_-$", cette condition initiale autoriserait à fixer les points de notre processus de Hawkes sur $\mathbb{R}_-$ de manière déterministe. La raison pour laquelle on ne considère que les intensités stochastiques sur $\mathbb{R}_+$, c'est que la condition initiale peut fixer des points sur $\mathbb{R}_-$ de manière déterministe, et dans ce cas, on ne peut pas avoir d'intensité stochastique.

Définition II.A.2 (Processus de Hawkes isolé sans condition initiale) :
Soit Z un processus ponctuel sur $\mathbb{R}$ admettant une $(\mathcal{F}_t)_t-$intensité $(\lambda(t))_{t\in\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$. On dit que Z est un $(\mathcal{F}_t)_t-$processus de Hawkes sans condition initiale si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lambda_t = f\left(\int_{]-\infty,t[} h(t-s)dZ(s)\right)$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ et $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

On peut remarquer, qu'il y a une différence entre un processus de Hawkes sans condition initiale et un processus de Hawkes de condition initiale le prédicat qui vaut toujours "vrai". En effet, au sens de la définition II.A.1, la forme de $\lambda(t)$ n'est imposée que pour $t \geq 0$. Il apparait toutefois nécessaire de différencier ces deux notions, car on ne peut pas garantir la forme de $\lambda(t) = f\left(\int_{]-\infty,t[} h(t-s)dZ(s)\right)$ sur $\mathbb{R}_-$ et le fait que λ soit l'intensité stochastique de Z en même temps qu'une condition initiale sur $\mathbb{R}_-$ dans le cas général. En effet, prenons l'exemple du prédicat $\mathcal{P}_{vide}$, ce prédicat impose $\lambda(t) = 0$ pour $t \leq 0$, et la formule imposerait donc $f(0) = 0$, ce qui est une condition que l'on ne veut pas nécessairement garantir.

Dans les définitions II.A.1 et II.A.2, on considère un processus ponctuel isolé, dans le sens où il est seul à "alimenter" son intensité stochastique. On peut considérer un cas plus général, avec plusieurs processus ponctuels en interaction.

Définition II.A.3 (Processus de Hawkes en interaction avec condition initiale) :
Soient $N \in \mathbb{N}^*$, et $Z_1, \ldots, Z_N$ des processus ponctuels admettant des $(\mathcal{F}_t)_t-$intensités respectives $(\lambda_i(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ sur $\mathbb{R}_+$ et soit $\mathcal{P}$ un prédicats sur les $N-$uplets de processus ponctuels sur $\mathbb{R}_-$. On dit que $(Z_1, \ldots, Z_N)$ est un système de $(\mathcal{F}_t)_t-$processus de Hawkes en interaction de condition initiale $(\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_N)$ si :

$$\begin{cases} \mathcal{P}\left(Z_{1|\mathbb{R}_-}, \ldots, Z_{N|\mathbb{R}_-}\right) \text{ est vrai} \\ \forall 1 \leq i \leq N, \forall t \in \mathbb{R}_+, \lambda_i(t) = f_i\left(\sum_{j=1}^{N} \int_{]-\infty,t[} h_{ji}(t-s)dZ_j(s)\right) \end{cases}$$

où $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ $(1 \leq i \leq N)$ et $h_{ji} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i, j \leq N)$

Définition II.A.4 (Processus de Hawkes en interaction sans condition initiale) :
Soient $N \in \mathbb{N}^*$, et $Z_1, \ldots, Z_N$ des processus ponctuels admettant des $(\mathcal{F}_t)_t-$intensités respectives $(\lambda_i(t))_{t\in\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$. On dit que $(Z_1, \ldots, Z_N)$ est un système de $(\mathcal{F}_t)_t-$processus de Hawkes en interaction sans condition initiale si :

$$\forall 1 \leq i \leq N, \forall t \in \mathbb{R}, \lambda_i(t) = f_i\left(\sum_{j=1}^{N} \int_{]-\infty,t[} h_{ji}(t-s)dZ_j(s)\right)$$

où $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ $(1 \leq i \leq N)$ et $h_{ji} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i, j \leq N)$

Dans la littérature, un processus de Hawkes isolé s'appelle "univariate Hawkes process", et un système de processus de Hawkes en interaction "multivariate Hawkes process".

On peut remarquer que dans le cas des processus de Hawkes sans condition initiale, la "dynamique" évolue librement depuis $-\infty$. On peut donc s'attendre à une "stabilisation" de la dynamique, dans le sens où la loi du processus devient invariante en fonction du temps. Développons cette notion de stationnarité dans la prochaine sous-section.

II.B Stationnarité

Définition II.B.1 (Stationnarité) :
Soit Z un processus ponctuel sur $\mathbb{R} \times E$ (où $(E, \mathcal{E})$ est un espace mesurable). On définit S_t l'opérateur de décalage des processus ponctuels par rapport à la première variable, c'est-à-dire que pour tout $(A, B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{E}$, $S_t Z(A \times B) = Z((t + A) \times B)$ (où $t + A = \{t + x \ : \ x \in A\}$)
On dit que Z est stationnaire si $\forall t \in \mathbb{R}, S_t Z$ a même loi que Z.

Le lemme II.B.4 sera beaucoup utilisé dans la suite. Sa démonstration repose sur deux lemmes classiques de la théorie de l'intégration.

Lemme II.B.2 :
Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ invariante par translation telle que $\mu([0,1]) < +\infty$.
Alors $d\mu(t) = \mu([0,1])dt$

Lemme II.B.3 :
Soient $f, g; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables telles que pour tout borélien A, $\displaystyle\int_A f(t)dt = \int_A g(t)dt$.
Alors $f = g \ \ pp$

preuve :

Montrons que $f \leq g \ \ pp$. Pour tout $n \geq 1$, posons $A_n = \{f \geq g + 1/n\}$. On a alors

$$\int_{A_n} f = \int_{A_n} g \leq \int_{A_n} f - \frac{1}{n} Leb(A_n)$$

Donc nécessairement, A_n est de mesure nulle, d'où $\{f > g\} = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ est aussi de mesure nulle, c'est-à-dire $f \leq g \ \ pp$. De même, on démontre que $f \geq g \ \ pp$, et donc que $f = g \ \ pp$ ■

Lemme II.B.4 :
Soit Z un processus ponctuel sur $\mathbb{R}$ stationnaire admettant une intensité stochastique $(\lambda(t))_t$ telle que $\mathbb{E}[Z([0,1])] < +\infty$.
Alors, il existe une constante $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour presque tout t, $\mathbb{E}[\lambda(t)] = K$

preuve :

Soit $\mu : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{E}[Z(A)]$ une mesure. Par stationnarité de Z, on sait que μ est invariante par translation. Par le lemme II.B.2, on sait alors $d\mu(t) = K.dt$ où $K = \mathbb{E}[Z([0,1])]$.
On sait alors que, pour tout borélien A, on a

$$\begin{aligned} \int_A K dt = \mathbb{E}[Z(A)] &= \mathbb{E}\left[\int_A \lambda(t)dt\right] \\ &= \int_A \mathbb{E}[\lambda(t)dt] \end{aligned}$$

Il suffit alors de conclure avec le lemme II.B.3 ■

La constante K du lemme II.B.4 est donnée par $K = \mathbb{E}[\lambda(t)]$ pour preque tout t. Pour simplifier, dans la suite, on supposera que $K = \mathbb{E}[\lambda(0)]$.
Dans la suite, on utilisera un critère de stationnarité basé sur un espace de probabilité défini comme l'espace canonique d'un uplet de processus de Poisson indépendants.

Définition II.B.5 :

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, \mathbb{P}_N)$ l'espace canonique d'un $N-$uplet de processus ponctuels de Poisson indépendants sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ d'intensité la mesure de Lebesgue. C'est-à-dire, tout $\omega \in \Omega_N$ s'écrit $\omega = (\pi_1, \ldots, \pi_N)$ où les π_i sont des réalisations de processus de Poisson indépendants d'intensité la mesure de Lebesgue. On introduit l'opérateur de décalage θ_t sur Ω_N défini par $\theta_t \omega = (S_t \pi_1, \ldots, S_t \pi_N)$

Lemme II.B.6 (Critère de stationnarité) :

Soit Z un processus ponctuel sur $\mathbb{R}$ défini sur l'espace de probabilité $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, \mathbb{P}_N)$ de la définition II.B.5. Si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S_t Z = Z \circ \theta_t$, alors Z est stationnaire.

preuve :

Pour toute fonction mesurable et positive g, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[g(S_t Z)\right] &= \mathbb{E}\left[g(Z \circ \theta_t)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[g(Z)\right] \end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que θ_t est invariant sous $\mathbb{P}_N$. Ceci étant évident, car les processus de Poisson d'intensité la mesure de Lebesgue sont stationnaires, puisque cette mesure est invariante par translation. ■

II.C Construction des processus de Hawkes

Le but de cette sous-section est de présenter les résultats essentiels pour construire des processus de Hawkes.

Lemme II.C.1 (Amincissement) :

Soient π un processus de Poisson sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ d'intensité la mesure de Lebesgue, et $(\mathcal{F}_t)_t$ une filtration adaptée à π tels que $\forall s < t$, $\mathcal{F}_s$ et $\pi_{|[t,+\infty[}$ sont indépendants. Soit $(\lambda_t)_t$ un processus positif et $(\mathcal{F}_t)_t-$prévisible. Soit Z le processus ponctuel défini par

$$Z(C) = \int_{C \times \mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{x \leq \lambda_t\}} d\pi(t,x) \quad \textit{pour } C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Alors Z admet $(\lambda_t)_t$ comme $(\mathcal{F}_t)_t-$intensité.

preuve :

Soit $(C_t)_t$ un processus prévisible et positif, comme $(\lambda_t)_t$ est aussi prévisible, on sait que $(C_t \mathbb{1}_{\{x \leq \lambda_t\}})_{t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}_+}$ est aussi prévisible. On peut donc appliquer le lemme I.D.6 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} C_t \mathbb{1}_{\{x \leq \lambda_t\}} d\pi(t,x)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} C_t \mathbb{1}_{\{x \leq \lambda_t\}} dx dt\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} C_t \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{x \leq \lambda_t\}} dx dt\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} C_t \lambda_t dt\right] \end{aligned}$$

■

Introduisons un lemme similaire au lemme II.C.1, que l'on utilisera dans la suite.

Lemme II.C.2 :

Soient $(\lambda_1(t))_t, (\lambda_2(t))_t$ deux processus positifs et prévisibles, et π un processus de Poisson sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ d'intensité la mesure de Lebesgue. Alors le processus ponctuel Z défini par

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \; Z(A) = \int_{A \times \mathbb{R}_+} \left|\mathbb{1}_{\{x \leq \lambda_1(t)\}} - \mathbb{1}_{\{x \leq \lambda_2(t)\}}\right| d\pi(t,x)$$

Admet $|\lambda_1 - \lambda_2|$ comme intensité stochastique.

preuve :

Soit $(C_t)_t$ un processus positif et prévisible. Soient $\lambda^+(t) = \max(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$ et $\lambda^-(t) = \min(\lambda_1(t), \lambda_2(t))$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_A C_t dZ(t)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{A\times\mathbb{R}_+} C_t \left|\mathbb{1}_{\{x\leq\lambda_1(t)\}} - \mathbb{1}_{\{x\leq\lambda_2(t)\}}\right| d\pi(t,x)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{A\times\mathbb{R}_+} C_t \mathbb{1}_{\{x\leq\lambda^+(t)\}} d\pi(t,x)\right] - \mathbb{E}\left[\int_{A\times\mathbb{R}_+} C_t \mathbb{1}_{\{x\leq\lambda^-(t)\}} d\pi(t,x)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{A\times\mathbb{R}_+} C_t \lambda^+(t) dt\right] - \mathbb{E}\left[\int_{A\times\mathbb{R}_+} C_t \lambda^-(t) dt\right] \qquad \text{(cf II.C.1)} \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{A\times\mathbb{R}_+} C_t \left|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)\right| dt\right]
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Théorème II.C.3 :

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soient $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ $(1 \leq i \leq N)$ et $h_{ji} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i, j \leq N)$.

On suppose que les fonctions f_i sont continues à gauche et croissantes, et que les fonctions h_{ji} sont positives.

Alors il existe un système de processus de Hawkes $(Z_1, \ldots, Z_N)$ sans condition initiale. De plus, ces processus sont stationnaires.

preuve :

On se place sur l'espace $(\Omega_N, \mathcal{F}_N, \mathbb{P}_N)$ de la définition II.B.5. Soient $\pi_1, \ldots, \pi_N$ les processus de Poisson sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ indépendants d'intensité la mesure de Lebesgue dont Ω_N est l'espace canonique. Dans la suite, on notera cette espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pour alléger les notations.

En utilisant le lemme II.C.1, il suffit de construire des processus Z_i et λ_i tels que

$$\left\{\begin{array}{l}
Z_i(C) = \displaystyle\int_{C\times\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{x\leq\lambda_i(t)\}} d\pi_i(t,x) \\
\lambda_i(t) = f_i\left(\displaystyle\sum_{j=1}^N \int_{]-\infty,t[} h_{ji}(t-s) dZ_j(s)\right)
\end{array}\right.$$

pour tout $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), t \in \mathbb{R}$ et $i \in [\![1, N]\!]$.

Pour obtenir ces égalités, on utilise le schéma d'itération de Picard suivant :

$$\left\{\begin{array}{lll}
\forall t \in \mathbb{R}, & \lambda_i^{(0)}(t) = 0 & (a) \\
\forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), & Z_i^{(n)}(C) = \displaystyle\int_{C\times\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\left\{x\leq\lambda_i^{(n)}(t)\right\}} d\pi_i(t,x) & (b) \\
\forall t \in \mathbb{R}, & \lambda_i^{(n+1)}(t) = f_i\left(\displaystyle\sum_{j=1}^N \int_{]-\infty,t[} h_{ji}(t-s) dZ_j^{(n)}(s)\right) & (c)
\end{array}\right.$$

Il suffit donc de montrer que les processus $(Z_i^{(n)})_n$ et $(\lambda_i^{(n)})_n$ convergent (dans un sens que l'on précisera), puis de justifier un passage à la limite dans les équations (b) et (c).

Montrons d'abord que les processus convergent vers des processus limites. Pour cela, on va montrer par récurrence sur n, que pour tout $\omega \in \Omega$, et pour tout $1 \leq i \leq N$, on a

$$\left\{\begin{array}{l}
\forall t \in \mathbb{R}, \lambda_i^{(n+1)}(t) \geq \lambda_i^{(n)}(t) \\
Z_i^{(n)} \subseteq Z_i^{(n+1)}
\end{array}\right. \qquad (\mathrm{H}_n)$$

Quand on écrit $Z_i^{(n)} \subseteq Z_i^{(n+1)}$, on identifie les mesures de comptage $Z_i^{(n)}$ et les ensembles de points que ces mesures comptent.

Comme $\lambda_i^{(0)} \equiv 0$ et $Z_i^{(0)} \equiv \varnothing$, H_0 est trivialement vraie.

Supposons que H_n soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons H_{n+1}. Soient donc $\omega \in \Omega$ et $1 \leq i \leq N$ fixés, on remarque que la positivité des h_{ji} implique $\sum_{j=1}^{N} \int_{]-\infty,t[} h_{ji}(t-s)dZ_j^{(n+1)}(s) \geq \sum_{j=1}^{N} \int_{]-\infty,t[} h_{ji}(t-s)dZ_j^{(n)}(s)$ (puisque $Z_j^{(n)} \subseteq Z_j^{(n+1)}$ pour tout j). Et comme f_i est croissante, on obtient bien $\lambda_i^{(n+2)}(t) \geq \lambda_i^{(n+1)}(t)$. De plus, par définition, $Z_i^{(k)}$ compte les points de π_i sous la courbe $\{(t, \lambda_i^{(k)}(t)) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ (pour tout $k \in \mathbb{N}^*$). Comme $\lambda_i^{(n+2)} \geq \lambda_i^{(n+1)}$, on a bien $Z_i^{(n+1)} \subseteq Z_i^{(n+2)}$. On a donc bien montré H_{n+1}.

Donc, à $\omega \in \Omega, i \in [\![1, N]\!], t \in \mathbb{R}$ fixés, la suite $\left(\lambda_i^{(n)}(t)\right)_n$ est croissante, donc converge vers une certaine limite $\lambda_i(t)$. De même, à $\omega \in \Omega, i \in [\![1, N]\!]$, on définit $Z_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_i^{(n)}$ (qui est une limite croissante).

De plus, on peut montrer par récurrence que la filtration naturelle de π_i est adaptée à $Z_i^{(n)}$ et que $(\lambda_i^{(n)}(t))_t$ est prévisible par rapport à la filtration naturelle de π_i. Donc $(\lambda_i(t))_t$ est aussi prévisible par rapport à cette filtration.

D'après le lemme II.C.1, pour montrer que Z_i admet λ_i comme $(\mathcal{F}_t^{\pi_i})_t-$intensité, il suffit de montrer que

$$Z_i(C) = \int_{C \times \mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{x \leq \lambda_i(t)\}} d\pi_i(t,x) \tag{28}$$

Ensuite, en appliquant la proposition I.D.9, on saura que Z_i admet λ_i comme $(\mathcal{F}_t)_t-$intensité (avec $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{\pi_1} \vee \ldots \vee \mathcal{F}_t^{\pi_N}$)

Montrons (28).

Soient ω et i fixés. Ecrivons $\pi_i = \{(T_k, X_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \ : \ k \in \mathbb{N}\}$. On sait que $\forall t \notin \{T_k \ : \ k \in \mathbb{N}\}, Z_i(\{t\}) = \lim Z_i^{(n)}(\{t\}) = 0$. Donc $Z_i \subseteq \pi_i$. Par ailleurs, on sait que $Z_i(\{T_k\}))$ est la limite croissante des $Z_i^{(n)}(\{T_k\}) \in \{0, 1\}$. Distinguons deux cas.

<u>cas 1 :</u> $Z_i(\{T_k\}) = 1$, dans ce cas, il existe un n_0 tel que $\forall n \geq n_0, Z_i^{(n)}(\{T_k\}) = 1$. Ce qui revient à dire que $\forall n \geq n_0, X_k \leq \lambda_i^{(n)}(T_k)$. En passant à la limite, on a donc $X_k \leq \lambda_i(T_k)$. Autrement dit, on vient de montrer que : $T_k \in Z_i \Rightarrow X_k \leq \lambda_i(T_k)$

<u>cas 2 :</u> $Z_i(\{T_k\}) = 0$, dans ce cas $\forall n, Z_i^{(n)}(\{T_k\}) = 0$, ie $X_k > \lambda_i(T_k)$. En passant à la limite, on a $X_k \geq \lambda_i(T_k)$. On vient donc de montrer que $T_k \notin Z_i \Rightarrow X_k \geq \lambda_i(T_k)$

On sait donc que :

$$X_k < \lambda_i(T_k) \Rightarrow T_k \in Z_i \Rightarrow X_k \leq \lambda_i(T_k)$$

On sait alors que, pour tout borélien C (on est toujours à ω fixé) on a

$$\int_{C \times \mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{x < \lambda_i(t)\}} d\pi_i(t,x) \leq Z_i(C) \leq \int_{C \times \mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{x \leq \lambda_i(t)\}} d\pi_i(t,x)$$

D'où

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}\left[\left|Z_i(C) - \int_{C \times \mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{x \leq \lambda_i(t)\}} d\pi_i(t,x)\right|\right] & \leq & \mathbb{E}\left[\int_{C \times \mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{x = \lambda_i(t)\}} d\pi_i(t,x)\right] \\ & = & \mathbb{E}\left[\pi_i\left(\{(t, \lambda_i(t)) \ : \ t \in C\}\right)\right] \\ & = & 0 \end{array}$$

On obtient bien l'égalité (28) presque sûrement. Donc, on a bien montré que Z_i admet λ_i comme $(\mathcal{F}_t)_t-$intensité.

Il suffit dont de montrer que $\lambda_i(t) = f_i\left(\sum_{j=1}^{N} \int_{]-\infty,t[} h_{ji}(t-s)dZ_j(s)\right)$. Pour cela, on va faire un passage à la limite dans l'égalité ci-dessous (à ω fixé) :

$$\lambda_i^{(n+1)}(t) = f_i\left(\sum_{j=1}^{N}\int_{]-\infty,t[} h_{ji}(t-s)dZ_j^{(n)}(s)\right) \tag{29}$$

Le membre de gauche tend vers $\lambda_i(t)$ (on l'a déjà vu, et c'est même la définition de $\lambda_i(t)$).
Pour prendre la limite dans le membre de droite, il faut remarquer que, pour tout j

$$\int_{]-\infty,t[} h_{ji}(t-s)dZ_j^{(n)}(s) = \int_{]-\infty,t[} h_{ji}(t-s)\mathbb{1}_{\left\{s\in Z_j^{(n)}\right\}}dZ_j(s) \tag{30}$$

Ceci est une conséquence du fait que $\forall n, Z_j^{(n)} \subseteq Z_j$. En effet, quand on intègre par rapport à $Z_j^{(n)}$, cela revient sommer sur tous les points du processus $Z_j^{(n)}$, ce qui revient à sommer sur tous les points de Z_j et à enlever ceux qui ne sont pas dans $Z_j^{(n)}$. On pourrait le montrer plus rigoureusement, mais cela ferait introduire beaucoup de notations pour pas grand chose.

Comme $\mathbb{1}_{\left\{s\in Z_j^{(n)}\right\}}$ est une suite croissante qui converge vers $\mathbb{1}_{\{s\in Z_j\}}$ et que les fonctions h_{ji} sont positives, on peut appliquer le théorème de convergence monotone au membre de droite de (30). Et comme f_i est continue à gauche, on sait que le membre de droite de l'égalité (29) tend vers $f_i\left(\sum_{j=1}^{N}\int_{]-\infty,t[} h_{ji}(t-s)dZ_j(s)\right)$

Finalement on a bien

$$\lambda_i(t) = f_i\left(\sum_{j=1}^{N}\int_{]-\infty,t[} h_{ji}(t-s)dZ_j(s)\right)$$

La stationnarité est évidente. En effet, les processus $Z_1,\ldots,Z_N$ ont été construits en amincissant les processus de Poisson $\pi_1,\ldots,\pi_N$, il est donc clair que, pour tout t, $S_tZ_i = Z_i\circ\theta_t$, et le lemme II.B.6 est donc appliquable. ■

La preuve du théorème II.C.3 est une adaptation directe de la preuve du théorème 6 de [Brémaud et Massoulié, 1996] dans le cas où il y a N processus et pas seulement deux.

En pratique, pour construire un processus de Hawkes Z, on utilise toujours un résultat d'amincissement d'un processus ponctuel de Poisson π, du même genre que le lemme II.C.1. Il est intéressant de noter que la réciproque est, en partie, vraie. C'est-à-dire que si on se donne un processus ponctuel Z sur $\mathbb{R}$ localement fini admettant une intensité stochastique, on peut construire un processus ponctuel de Poisson π tel que Z et π vérifient la formule du lemme II.C.1. Plus précisément, on a le lemme II.C.4.

Lemme II.C.4 (Inversion de Poisson) :
Soit $Z = \{T_n \ : \ n\in\mathbb{Z}\}$ un processus ponctuel sur $\mathbb{R}$ localement fini admettant une $(\mathcal{F}_t)_t$−intensité stochastique $(\lambda(t))_{t\in\mathbb{R}}$ qui est $(\mathcal{F}_t)_t$−prévisible. Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ des variables iid de loi uniforme sur $[0,1]$ indépendantes de Z et $\widehat{\pi}$ un processus ponctuel de Poisson d'intensité la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ indépendant de $(U_n)_n$ et de Z. On définit le processus $\bar{\pi}$ sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\bar{\pi}(]a,b]\times L) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{]a,b]}(T_n)\mathbb{1}_L(\lambda(T_n)U_n) + \int_{]a,b]\times(L\setminus]0,\lambda(t)])} d\widehat{\pi}(t,x)$$

Alors $\bar{\pi}$ est un processus ponctuel de Poisson d'intensité la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

Une conséquence du lemme II.C.4 est qu'étant donné un système de processus de Hawkes en intéraction $(Z_1,\ldots,Z_N)$ (localement bornés), on peut se donner des processus ponctuels de Poisson $(\pi_1,\ldots,\pi_N)$ tel que :

$$\forall C\in\mathcal{B}(\mathbb{R}), Z_i(C) = \int_{C\times\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\left\{x\le f_i\left(\sum_{j=1}^{N}\int_{]-\infty,t[} h_{ji}(t-s)dZ_j(s)\right)\right\}} d\pi_i(t,x) \tag{31}$$

On aurait donc pu définir les processus de Hawkes par la relation (31), comme c'est fait dans la définition 2 de [Delattre *et al.*, 2014]. Dans la sous-section $III.B$, on introduira une généralisation des processus de Hawkes que l'on définira par une relation similaire à (31).

Dans la suite, on verra deux autres théorèmes d'existence de systèmes de processus de Hawkes en interaction, tous deux basés sur le même schéma d'itération de Picard que l'on a vu dans la preuve du théorème II.C.3.

III Limite de grande échelle de processus de Hawkes

Dans cette section, on s'intéresse à la stabilité d'un système composé de N processus de Hawkes quand N tend vers $+\infty$. On va supposer que chacun des N processus de Hawkes d'un système est similaire aux autres, c'est-à-dire que les fonctions f_i $(1 \leq i \leq N)$ et h_{ji} $(1 \leq i, j \leq N)$ des définitions II.A.3 et II.A.4 ne dépendent ni de i ni de j. On va donc, en particulier, s'intéresser à la convergence de la somme $\sum_{j=1}^{N} \int_{]-\infty,t[} h(t-s)dZ_j(s)$ quand N tend vers $+\infty$, puisqu'elle apparait dans la définition des processus de Hawkes. Pour faire converger cette somme, on va étudier deux cas particuliers : le cas champ moyen où on normalise la somme en $1/N$ et le cas diffusif où on normalise la somme en $1/\sqrt{N}$.

Autrement dit, on va s'intéresser à a convergence des processus de Hawkes vers des processus limites. La première chose à faire dans chacun des deux cas est de trouver une caractérisation de ces processus limites.

III.A Champ moyen

Dans cette sous-section, on présente certains résultats de [Delattre *et al.*, 2014]. Dans toute cette sous-section, on va imposer la condition initiale vide, c'est-à-dire qu'avec les notations de II.A.3, les processus Z_i n'ont aucun point sur $\mathbb{R}_-$ et donc leur intensité λ_i s'écrira

$$\lambda_i(t) = f_i\left(\sum_{j=1}^{N} \int_{]0,t[} h_{ji}(t-s)dZ_j(s)\right)$$

On aura besoin de deux lemmes techniques pour prouver les résultats principaux de cette sous-section. Le premier est un lemme de calcul qui repose sur une interversion d'intégrales.

Lemme III.A.1 :
Soient $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ localement inrégrable et $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ à variations finies sur tout segment telle que $\alpha(0) = 0$. Alors, pour tout $t \geq 0$

$$\int_0^t \int_{]0,s[} h(s-u)d\alpha(u)ds = \int_0^t h(t-s)\alpha(s)ds$$

preuve :

Pour tout $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_{]0,s[} h(s-u)d\alpha(u)ds &= \int_0^t \int_{]0,t[} \mathbb{1}_{\{u<s\}} h(s-u)d\alpha(u)ds \\
&= \int_{]0,t[} \int_0^t \mathbb{1}_{\{u<s\}} h(s-u)dsd\alpha(u) \\
&= \int_{]0,t[} \int_u^t h(s-u)dsd\alpha(u) \\
&= \int_{]0,t[} \int_0^{t-u} h(v)dvd\alpha(u) \\
&= \int_{]0,t[} \int_0^t \mathbb{1}_{\{v\leq t-u\}} h(v)dvd\alpha(u) \\
&= \int_0^t \int_{]0,t[} \mathbb{1}_{\{v\leq t-u\}} h(v)d\alpha(u)dv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_{]0,s[} h(s-u)d\alpha(u)ds &= \int_0^t \left(\int_{]0,t-v[} d\alpha(u)\right) h(v)dv \\ &= \int_0^t \alpha(t-v)h(v)dv \\ &= \int_0^t \alpha(v)h(t-v)dv\end{aligned}$$

■

L'autre lemme est une sorte de généralisation du lemme de Grönwall. On utilisera la version (faible) suivante du lemme de Grönwall.

Lemme III.A.2 (Grönwall) :

Soit ψ et y des fonctions de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}_+$ continues telles que

$$\exists c \geq 0, \forall t \in [0,T], y(t) \leq c + \int_0^t \psi(s)y(s)ds$$

Alors $y(T) \leq c \exp\left(\int_0^T \psi(s)ds\right)$

Lemme III.A.3 :

Soient $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ localement intégrable et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ localement bornée.

(*i*) *Soit u une fonction positive, localement bornée et continue telle que $\forall t \geq 0, u(t) \leq g(t) + \int_0^t \varphi(t-s)u(s)ds$. Alors pour tout $T \geq 0$, il existe une constante C_T (dépendant uniquement de T, g et φ) telle que $\sup_{t\in[0,T]} u(t) \leq C_T \sup_{t\in[0,T]} g(t)$*

(*ii*) *Soit $(u^{(n)})_n$ une suite de fonctions localement bornées, positives et continues telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, u^{(n+1)}(t) \leq g(t) + \int_0^t \varphi(t-s)u^{(n)}(s)ds$. Alors, pour tout $T \geq 0$, il existe une constante C_T (dépendant uniquement de $T, u^{(0)}, g$ et φ) telle que $\sup_{t\in[0,T]} u^{(n)}(t) \leq C_T$*

(*iii*) *Soit $(u^{(n)})_n$ une suite de fonctions localement bornées, positives et continues telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, u^{(n+1)}(t) \leq \int_0^t \varphi(t-s)u^{(n)}(s)ds$. Alors, pour tout $T \geq 0$, il existe une constante C_T (dépendant uniquement de $T, u^{(0)}$ et h) telle que $\sup_{t\in[0,T]} \sum_{n\geq 0} u^{(n)}(t) \leq C_T$*

preuve :

Étape 1 : *Montrons le point* (*i*)

Soit $T > 0$ fixé. On sait qu'il existe $A > 0$ tel que $\int_0^T \varphi(s)\mathbb{1}_{\{\varphi(s)\geq A\}}ds \leq 1/2$. En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^T \varphi(s)\mathbb{1}_{\{\varphi(s)\geq n\}}ds > 1/2$, et par convergence dominée (puisque φ est localement intégrable), on aurait $0 \geq 1/2$.

On sait donc que, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} u(t) &\leq g(t) + \int_0^t \varphi(t-s)\mathbb{1}_{\{\varphi(t-s)\leq A\}}u(s)ds + \int_0^t \varphi(t-s)\mathbb{1}_{\{\varphi(t-s)>A\}}u(s)ds \\ &\leq g(t) + A\int_0^t u(s)ds + \frac{1}{2}\sup_{s\in[0,t]} u(s)\end{aligned}$$

On sait donc que $\forall t \in [0,T], \sup_{s\in[0,t]} u(s) \leq 2\left(\sup_{s\in[0,T]} g(s)\right) + 2A\int_0^t u(s)ds$. On peut donc appliquer le lemme de Grönwall pour obtenir $\sup_{t\in[0,T]} u(t) \leq 2\left(\sup_{s\in[0,T]} g(s)\right)e^{2AT}$

Étape 2 : *Montrons le point* (ii)

On pose $v^{(n)}(t) = \max_{0\leq k\leq n} u^{(k)}(t)$. Il suffit alors de remarquer que $v^{(n)}(t) \leq g(t)+u^{(0)}(t)+\int_0^t \varphi(t-s)v^{(n)}(s)ds$, puis d'appliquer le point (i) pour avoir $\forall n, \forall t \in [0,T]$, $\sup_{t\in[0,T]} v^{(n)}(t) \leq C_T \sup_{t\in[0,T]} \left(g(t)+u^{(0)}(t)\right)$

Étape 3 : *Montrons le point* (iii)

Il suffit de poser $v^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} u^{(k)}(t)$ et de remarquer que $v^{(n+1)}(t) \leq u^{(0)}(t) + \int_0^t \varphi(t-s)v^{(n)}(s)ds$, puis d'appliquer le point (ii)

■

Avant de démontrer le théorème d'existence des systèmes de Processus de Hawkes, on va démontrer un critère de continuité qui nous permettra d'appliquer le lemme III.A.3.

Lemme III.A.4 :

Soit Z un processus ponctuel tel que $\forall a<b$, ps $\mathbb{E}\left[Z([a,b])\right] < +\infty$.et $\forall t$, ps $Z(\{t\}) = 0$

Alors la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{E}\left[Z([0,t])\right]$ est continue.

preuve :

On va montrer que la fonction est continue à droite et à gauche.

Considérons donc $(t_k)_k$ une suite strictement croissante qui converge vers un réel t. Si on fixe un ω pour lequel $Z^\omega(\{t\}) = 0$, alors comme la suite d'intervalles $[0,t_k]$ est croissante (pour l'inclusion) et que l'union est égale à $[0,t[$, on sait que $Z^\omega([0,t_k])$ converge vers $Z^\omega([0,t[) = Z^\omega([0,t])$ (puisque $Z^\omega(\{t\}) = 0$). On a donc, par convergence dominée (avec le majorant $Z([0,t+1])$ qui est d'espérance finie par hypothèse), $\mathbb{E}\left[Z([0,t_k])\right] \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[Z([0,t])\right]$

Montrons maintenant la continuité à gauche. Soit donc $(t_k)_k$ une suite strictement décroissante qui converge un $t>0$ telle que $t_0 < t+1$. Fixons un ω tel que $Z^\omega([0,t+1]) < +\infty$. On sait alors que la suite d'intervalles $[0,t_k]$ est décroissante et que l'intersection vaut $[0,t]$, et que donc $Z^\omega([0,t_k])$ converge vers $Z^\omega([0,t])$ (car $Z^\omega([0,t+1])$). Par convergence dominée, on a donc $\mathbb{E}\left[Z([0,t_k])\right] \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} Z([0,t])$.

■

Avec le même argument, on prouverait évidemment que la fonction $t \in \mathbb{R}_- \mapsto \mathbb{E}\left[Z([t,0])\right]$ est continue.

Nous allons maintenant prouver un autre théorème d'existence de systèmes de processus de Hawkes en interaction, dont les hypothèses sont mieux adaptées aux résultats de cette partie que celles de la proposition II.C.3, notamment au lemme III.A.6 qui permet de construire les processus limites.

Proposition III.A.5 :

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on considère $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ $C-$lipschitziennes pour tout $1 \leq i \leq N$ (pour un certain $C \in \mathbb{R}_+^*$) et $h_{ji} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ localement intégrables pour tout $1 \leq i,j \leq N$.

Alors il existe un système de processus de Hawkes en interaction $(Z_1,\ldots,Z_N)$ de condition initiale vide vérifiant $\forall 1 \leq i \leq N, \forall t \geq 0, \mathbb{E}\left[Z_i([0,t])\right] < +\infty$

preuve :

Pour construire ces processus de Hawkes, on va encore utiliser un schéma d'itération de Picard :

$$\left\{\begin{array}{lll}
\forall t \in \mathbb{R}, & \lambda_i^{(0)}(t) = 0 & (a) \\
\forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), & Z_i^{(n)}(C) = \displaystyle\int_{C\times\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\left\{x\leq\lambda_i^{(n)}(t)\right\}} d\pi_i(t,x) & (b) \\
\forall t \in \mathbb{R}, & \lambda_i^{(n+1)}(t) = f_i\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \int_{]0,t[} h_{ji}(t-s)dZ_j^{(n)}(s)\right) & (c)
\end{array}\right.$$

où les π_i ($1 \le i \le N$) sont des processus ponctuels de Poisson iid sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité la mesure de Lebesgue. Posons $\Delta_i^{(n)}(t) = \left|Z_i^{(n+1)} - Z_i^{(n)}\right|([0,t])$ et $\delta_i^{(n)}(t) = \mathbb{E}\left[\Delta_i^{(n)}(t)\right]$

$$\begin{aligned}
\delta_i^{(n)}(t) &= \mathbb{E}\left[\int_0^t |\lambda_i^{(n+1)}(s) - \lambda_i^{(n)}(s)|ds\right] \\
&\le C\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N \int_0^t \int_{[0,s[} |h_{ji}(s-u)|\, d\left|Z_j^{(n)} - Z_j^{(n-1)}\right|(u)ds\right] \\
&= C\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N \int_0^t \int_{[0,s[} |h_{ji}(s-u)|\, d\Delta_j^{(n-1)}(u)ds\right] \\
&= C\sum_{j=1}^N \mathbb{E}\left[\int_0^t |h_{ji}(t-s)|\Delta_j^{(n-1)}(s)ds\right] && \text{(cf lemme III.A.1)} \\
&= C\sum_{j=1}^N \int_0^t |h_{ji}(t-s)|\delta_j^{(n-1)}(s)ds
\end{aligned}$$

Notons $\delta^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^N \delta_i^{(n)}(t)$. On a évidemment $\delta_i^{(n)}(t) \le \delta^{(n)}(t)$.
D'où

$$\delta_i^{(n)}(t) \le C\int_0^t \sum_{j=1}^N |h_{ji}(t-s)|\delta^{(n-1)}(s)ds$$

En sommant ces inégalités pour i allant de 1 à N, on a

$$\delta^{(n)}(t) \le C\int_0^t \varphi(t-s)\delta^{(n-1)}(s)ds \tag{32}$$

où $\varphi(t) = \sum_{i,j=1}^N |h_{ji}(t)|$

Comme les h_{ji} sont localement intégrables, on sait que φ est aussi localement intégrable. Avec une récurrence immédiate, on peut démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta^{(n)}$ est localement bornée. On sait donc que $\delta^{(n)}$ est continue (par le lemme III.A.4), et on peut donc appliquer le lemme III.A.3. On sait alors que $\forall t \ge 0$, $\sum_{n\ge 0} \delta^{(n)}(t) < +\infty$.

Donc la série de terme général $\left(Z_i^{(n+1)} - Z_i^{(n)}\right)([0,t])$ est absolument convergente presque sûrement (car l'espérance du terme général est majoré par $\delta^{(n)}(t)$), donc convergente presque sûrement. On peut donc poser

$$Z_i([0,t]) = \sum_{n\ge 0}\left(Z_i^{(n+1)} - Z_i^{(n)}\right)([0,t])$$

Il est alors clair que $t \mapsto \mathbb{E}\left[Z_i([0,t])\right]$ est localement bornée, puisque cette fonction est croissante et que $\mathbb{E}\left[Z_i([0,t])\right] \le \sum_{n\ge 0} \mathbb{E}\left[\left|Z_i^{(n+1)} - Z_i^{(n)}\right|([0,t])\right] < +\infty$

Ensuite, on pose $\lambda_i(t) = f_i\left(\sum_{j=1}^N \int_{]0,t[} h_{ji}(t-s)dZ_j(s)\right)$

Il suffit alors de montrer que, pour tout $t \ge 0$ et pour tout $1 \le i \le N$,

$$Z_j([0,t]) = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{0\le x\le \lambda_j(s)\}} d\pi_j(t,x)$$

Pour cela on va utiliser

$$Z_i^{(n)}([0,t]) = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\left\{x\le \lambda_i^{(n)}(t)\right\}} d\pi_i(t,x) \tag{33}$$

Par le lemme de Fatou, on sait que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_{]0,t]} |Z_i(ds) - \pi_i(ds,[0,\lambda_i(s)])|\right] &\leq \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\int_{]0,t]} \left|\pi_i(ds,[0,\lambda_i^{(n)}(s)]) - \pi_i(ds,[0,\lambda_i(s)])\right|\right] \\
&\leq \lim_{n\to+\infty} C\sum_{j=1}^{N}\int_0^t\int_{]0,s[} |h_{ji}(s-u)| d\mathbb{E}\left[\left|Z_i - Z_i^{(n-1)}\right|\right](u)ds \\
&= \lim_{n\to+\infty} C\sum_{j=1}^{N}\int_0^t |h_{ji}(t-s)|\mathbb{E}\left[\left|Z_i - Z_i^{(n-1)}\right|\right]([0,s])ds
\end{aligned}$$

Il est alors facile de montrer que cette dernière limite est nulle. En effet, soit $\varepsilon > 0$, soit $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{n\geq N_\varepsilon} \delta^{(n)}(t) < \varepsilon$, donc en particulier, $\mathbb{E}\left[\left|Z_i - Z_i^{(n-1)}\right|\right]([0,t]) \leq \sum_{n\geq N_\varepsilon} \delta^{(n)}(t) < \varepsilon$. On sait alors, par intégrabilité locale des h_{ji}, que $C\sum_{j=1}^{N}\int_0^t |h_{ji}(t-s)|\mathbb{E}\left[\left|Z_i - Z_i^{(n-1)}\right|\right]([0,s])ds$ est inférieure à $K\varepsilon$ où K est une constante dépendant de t (qui est fixé ici), des h_{ji} et de C.

On sait alors que $\mathbb{E}\left[\int_{]0,t]} |Z_i(ds) - \pi_i(ds,[0,\lambda_i(s)])|\right] = 0$

On a donc, pour tout $t \geq 0$, presque sûrement, pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$Z_i([0,t]) = \int_{]0,t]\times\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{0\leq x\leq\lambda_i(s)\}} d\pi_i(t,x)$$

■

On peut adapter la preuve de la proposition III.A.5 dans le cas où il y a une infinité dénombrable de processus de Hawkes en interaction (cf théorème 6 de [Delattre *et al.*, 2014]).

En particulier, dans la proposition III.A.5, si on se donne f une fonction $C-$lipschitzienne et h une fonction localement intégrable, alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on sait qu'il existe un unique système de processus de Hawkes sur $\mathbb{R}_+$ $\left(Z_1^N, \ldots, Z_N^N\right)$ associé à $f_i = f$ (pour $1 \leq i \leq N$) et $h_{ji} = \frac{1}{N}h$ (pour $1 \leq i,j \leq N$).

Le résultat principal de cette sous-partie est la convergence des processus Z_i^N vers des processus limites $\bar{Z}_i$ iid. On va montrer que ces processus limites sont solutions de

$$\begin{aligned}
&\forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \quad \bar{Z}(C) = \int_{C\times\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{x\leq\bar{\lambda}(t)\}} d\pi(t,x) \\
&\forall t \in \mathbb{R}, \qquad\quad \bar{\lambda}(t) = f\left(\int_0^t h(t-s)d\mathbb{E}\left[\bar{Z}\right](s)\right)
\end{aligned} \tag{34}$$

où π est un processus ponctuel de poisson sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ d'intensité la mesure de Lebesgue.

Afin de démontrer l'existence et l'unicité de ce processus limite donné par (34), on va passer à l'espérance pour obtenir une équation sur le processus $m(t) = \mathbb{E}\left[\bar{Z}([0,t])\right]$. Il suffit ensuite d'utiliser le Lemme III.A.6.

Lemme III.A.6 :

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction $C-$lipschitzienne (pour un certain $C \in \mathbb{R}_+^*$) et $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable. Alors l'équation

$$m(t) = \int_0^t f\left(\int_0^s h(s-u)dm(u)\right)ds$$

admet une unique solution croissante, localement bornée et continue. De plus, cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$

preuve :

Étape 1 : *Montrons d'abord l'unicité.*

Soient donc m et $\widetilde{m}$ deux solutions. On pose $v(t) = \int_0^t d|m(u) - \widetilde{m}(u)|$. On sait donc que

$$v(t) \leq C \int_0^t \int_0^s |h(s-u)| d\,|m(u) - \widetilde{m}(u)| = C \int_0^t |h(t-u)| v(u) du$$

d'après le lemme III.A.1. De plus, la fonction $t \mapsto v(t)$ est localement bornée (car $v(t) \leq m(t) + \widetilde{m}(t)$) et continue, en effet, par définition v s'écrit $v(t) = \int_0^t d\,|m(u) - \widetilde{m}(u)| = (m(t) \vee \widetilde{m}(t)) - (m(t) \wedge \widetilde{m}(t))$ (car m et $\widetilde{m}$ sont croissantes, positives et continues) qui est bien continue. On peut donc appliquer le lemme III.A.3$-(i)$ pour obtenir que $\forall t, v(t) = 0$, et donc $\forall t, m(t) = \widetilde{m}(t)$

Étape 2 : *Montrons l'existence.*

Posons $m^{(0)}(t) = 0$ pour tout t, et $m^{(n+1)}(t) = \int_0^t f\left(\int_0^s h(s-u) dm^{(n)}(u)\right) ds$

Comme f est $C-$lipschitzienne, on sait que $|f(x)| \leq |f(0)| + C|x|$. D'où $m^{(n+1)}(t) \leq f(0)t + C \int_0^t |\varphi(t-u)| m^{(n)}(u) du$ (cf lemme III.A.1). On sait alors, par le lemme III.A.3$-(ii)$, que $t \mapsto \sup_{n \geq 0} m^{(n)}(t)$ est localement bornée.

Posons $\delta_{(n)}(t) = \int_0^t d\left|m^{(n+1)}(u) - m^{(n)}(u)\right| du$, on sait que $\delta^{(n+1)}(t) \leq C \int_0^t |\varphi(s-u)| \delta^{(n)}(u) du$. D'après le lemme III.A.3$-(iii)$, on sait donc que $\sum_{n \geq 0} \delta^{(n)}(t) < +\infty$ pour tout t. On peut donc poser $m(t) = \sum_{n \geq 0} \left(m^{(n+1)}(t) - m^{(n)}(t)\right)$, de telle sorte que $(m^{(n)}(t))_n$ converge vers $m(t)$ pour tout t. On sait donc que m est croissante (comme limite de fonctions croissantes) et localement bornée (puisque $t \mapsto \sup_{n \geq 0} m^{(n)}(t)$ est localement bornée).

Étape 3 : *Montrons maintenant que $t \mapsto m(t)$ est $\mathcal{C}^1$*

Tout d'abord, il est clair que, pour tout n, $m^{(n+1)}$ est dérivable, de dérivée $\left(m^{(n)}\right)'(t) = f\left(\int_0^t h(t-u) dm^{(n)}(u)\right)$. Montrons par récurrence que $m^{(n)}$ est $\mathcal{C}^1$. Si $m^{(n)}$ est $\mathcal{C}^1$, alors on peut écrire $\left(m^{(n+1)}\right)'(t) = f\left(\int_0^t h(t-u) \left(m^{(n)}\right)'(u) du\right) = f\left(\int_0^t h(u) \left(m^{(n)}\right)'(t-u) du\right)$ ce qui est bien continue. En effet, si $(t_k)_k$ converge vers t, alors $\left(m^{(n+1)}\right)'(t_k) = f\left(\int_0^{t+1} h(u) \left(m^{(n)}\right)'(t_k - u) \mathbb{1}_{\{u \leq t_k\}} du\right)$. Cette intégrale converge vers $\int_0^{t+1} h(u) \left(m^{(n)}\right)'(t-u) \mathbb{1}_{\{u \leq t\}} du$ par convergence dominée et par continuité de $\left(m^{(n)}\right)'$, et finalement la continuité de f (puisque f est lipschitzienne) permet de conclure.

On sait donc que les fonctions $\left(m^{(n)}\right)'$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\left(m^{(n+1)}\right)'(t) = f\left(\int_0^t h(t-u) \left(m^{(n)}\right)'(u) du\right)$, on sait donc que $\left|\left(m^{(n+1)}\right)'(t) - \left(m^{(n)}\right)'(t)\right| \leq C \int_0^t \left|h(t-u)\right| \left|\left(m^{(n)}\right)'(u) - \left(m^{(n-1)}\right)'(u)\right| du$. On peut donc appliquer le lemme III.A.3$-(iii)$ pour obtenir que la série de terme général $\left|\left(m^{(n+1)}\right)' - \left(m^{(n)}\right)'\right|$ converge uniformément sur tout segment (puisqu'elle est bornée). On sait alors que la somme de la série de terme général $\left(m^{(n+1)}\right) - \left(m^{(n)}\right)$ (qui n'est autre que m) est de classe $\mathcal{C}^1$

Étape 4 : *Il ne nous reste plus qu'à montrer que*

$$m(t) = \int_0^t f\left(\int_0^s h(s-u) dm(u)\right) ds = \int_0^t f\left(\int_0^s h(s-u) m'(u) du\right) ds$$

Pour cela, on va faire un passage à la limite dans l'équation

$$m^{(n+1)}(t) = \int_0^t f\left(\int_0^s h(s-u)\left(m^{(n)}\right)'(u)du\right)ds$$

Le membre de gauche converge vers $m(t)$ (par définition de $m(t)$). Le membre de droit converge vers $\int_0^t f\left(\int_0^s h(s-u)m'(u)du\right)ds$ par continuité de f et par convergence dominée. En effet, comme la série de terme général$\left|\left(m^{(n+1)}\right)' - \left(m^{(n)}\right)'\right|$ est convergente, on sait que la suite $\left(\left(m^{(n)}\right)'\right)_n$ est de Cauchy (pour la convergence uniforme sur les segments), donc converge uniformément sur $[0,t]$, et donc $\left(m^{(n)}\right)'(u)$ est uniformément borné en $(n,u) \in \mathbb{N} \times [0,t]$. Par suite, comme h est localement intégrable, on peut bien appliquer le théorème de convergence dominée.

■

Théorème III.A.7 (Propagation du chaos) :

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction $C-$lipschitzienne, et $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ localement de carré intégrable. Soit $(\pi_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de processus ponctuels de Poisson iid d'intensité la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique solution $\bar{Z}_i$ de (34) (avec $\pi = \pi_i$) telle que $t \mapsto \mathbb{E}\left[\bar{Z}_i([0,t])\right]$ est localement bornée.

De plus, si on considère pour tout N le système de processus de Hawkes $(Z_1^N, \dots, Z_N^N)$ suivant (dont la construction est faîte dans la preuve de la proposition III.A.5)

$$\begin{aligned} Z_i^N([0,t]) &= \int_{[0,t]\times[0,+\infty[} \mathbb{1}_{\{x \le \lambda_i^N(s)\}} d\pi_i(t,x) \\ \lambda_i^N(t) &= f\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \int_{[0,t[} h(t-s)dZ_j^N(s)\right) \end{aligned}$$

Alors, pour tout $T \geq 0$, pour tout $1 \leq i \leq N$, on a

$$\mathbb{E}\left[\left|Z_i^N - \bar{Z}_i\right|([0,T])\right] \leq \frac{C_T}{\sqrt{N}}$$

où C_T est une constante qui ne dépend que de T, f et h.

preuve :

Étape 1 : *Montrons d'abord l'existence et l'unicité des $\bar{Z}_i$.*

Soit donc $i \in \mathbb{N}^*$. L'espérance $m(t)$ de $\bar{Z}_i([0,t])$ doit être une solution croissante et localement bornée de (34). Par le lemme III.A.6, cette fonction m est unique. Cela impose l'unicité de $\bar{\lambda}_i$ de (34), puis celle de $\bar{Z}_i$. Pour l'existence, il suffit de considérer m l'unique solution localement bornée de $m(t) = \int_0^t f\left(\int_0^s h(s-u)dm(u)\right)ds$ (cf lemme III.A.6), puis de poser :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_i(t) &= f\left(\int_{[0,t[} h(t-s)d\mathbb{E}\left[\bar{Z}_i\right](s)\right) \\ \bar{Z}_i(C) &= \int_{C\times\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{x\le\bar{\lambda}_i(t)\}} d\pi_i(t,x) \end{aligned}$$

Il suffit alors de prouver que $\mathbb{E}\left[\bar{Z}_i([0,t])\right] = m(t)$. Ce qui est évident, par unicité de m.

Dans la suite, on note $\delta^N(t) = \mathbb{E}\left[\left|\bar{Z}_i - Z_i^N\right|([0,t])\right]$ (qui ne dépend pas de i).

Étape 2 : *Montrons que*

$$\delta^N(t) \leq C\frac{1}{\sqrt{N}}\int_0^t \left(\int_0^s (h(s-u))^2 dm(u)\right)^{1/2} ds + C\int_0^t |h(t-s)|\delta^N(s)ds \tag{35}$$

On sait que :

$$\begin{aligned}
\delta^N(t) &= \mathbb{E}\left[\left|\bar{Z}_1 - Z_1^N\right|([0,t])\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\bar{\lambda}_1(s) - \lambda_1^N(s)\right| ds\right] \\
&\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\int_0^s h(u-s)dm(u) - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \int_{[0,s[} h(s-u)dZ_j^N(u)\right| ds\right] \\
&\leq C\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|\int_0^s h(s-u)dm(u) - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \int_0^s h(s-u)d\bar{Z}_j(u)\right|\right] ds \\
&\quad + C\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \int_0^s h(s-u)d\left(\bar{Z}_j - Z_j^N\right)(u)\right|\right] ds
\end{aligned}$$

Dans la dernière égalité ci-dessus, on note A l'intégrale de la première ligne, et B celle de la seconde. On a donc $\delta^N(t) \leq C(A+B)$

Tout d'abord, par échangeabilité des $\bar{Z}_j - Z_j^N$ $(1 \leq j \leq N)$ et par le lemme III.A.1, on a :

$$\begin{aligned}
B &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_0^s |h(s-u)| d\left|\bar{Z}_1 - Z_1^N\right|(u) ds\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t |h(t-s)| \left|\bar{Z}_1 - Z_1^N\right|([0,s]) ds\right] \\
&= \int_0^t |h(t-s)| \delta^N(s) ds
\end{aligned} \tag{36}$$

Il suffit maintenant de majorer A. Notons $X_j(s) = \displaystyle\int_0^s h(s-u)d\bar{Z}_j(u)$. Comme les $(X_j(s))$ $(j \in \mathbb{N}^*)$ sont iid, d'espérance $\displaystyle\int_0^s h(s-u)dm(u)$, on sait par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\int_0^s h(s-u)dm(u) - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \int_0^s h(s-u)d\bar{Z}_j(u)\right|\right] &\leq \mathbb{V}\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \int_0^s h(s-u)d\bar{Z}_j(u)\right]^{1/2} \\
&= \mathbb{V}\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N X_j(s)\right]^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbb{V}\left[X_1(s)\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

D'où

$$A \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \int_0^s \mathbb{V}\left[X_1(s)\right]^{1/2} ds$$

Par ailleurs, on sait que

$$X_1(s) = \int_{[0,s[\times\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{x \leq \bar{\lambda}_1(u)\}} h(s-u) d\pi_1(u,x)$$

Donc

$$X_1(s) - \mathbb{E}\left[X_1(s)\right] = \int_{[0,s[\times\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{\{x \leq \bar{\lambda}_1(u)\}} h(s-u) d\widetilde{\pi}_1(u,x)$$

où $\widetilde{\pi}_1$ est la mesure de Poisson compensée de π_1.

On sait alors, par un argument d'isométrie classique (cf calcul stochastique sur des mesures de Poisson), que

$$\mathbb{V}\left[X_1(s)\right] = \int_0^s h(s-u)^2 f\left(\int_0^u h(u-r)dm(r)\right) du$$

Comme m est solution de (34), on sait que

$$\mathbb{V}\left[X_1(s)\right] = \int_0^s h(s-u)^2 dm(u)$$

On en déduit donc que

$$A \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \int_0^t \left(\int_0^s (h(s-u))^2 dm(u) \right)^{1/2} ds \tag{37}$$

Finalement, en combinant les inégalités (36) et (37), on obtient bien l'inégalité (35).

Pour finir la preuve il suffit d'appliquer le lemme III.A.3$-(i)$ à l'inégalité (35) (ce que l'on peut faire puisque δ^N est continue d'après le lemme III.A.4) et de remarquer que $t \mapsto \int_0^t \left(\int_0^s (h(s-u))^2 dm(u) \right)^{1/2} ds$ est localement bornée. En effet, m étant $\mathcal{C}^1$, on a $\int_0^t \left(\int_0^s (h(s-u))^2 dm(u) \right)^{1/2} ds = \int_0^t \left(\int_0^s (h(s-u))^2 m'(u) du \right)^{1/2} ds$, et comme m' est continue, m' est localement bornée, et puisque h est supposée localement de carré intégrable, on peut bien conclure.

■

III.B Régime diffusif

Cette sous-section suit les idées présentées dans [Löcherbach, 2017]

Dans la sous-section précédente, on a vu que les systèmes de processus de Hawkes $(Z_1^N, \dots, Z_N^N)$ dont les intensités sont données par $\lambda(t) = f\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \int_{]0,t[} h(t-s) dZ_j^N(s) \right)$ convergent vers des processus limites selon une propagation du chaos. Dans cette sous-section, on s'intéresse à la même question quand les intensités sont de la forme $\lambda(t) = f\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \int_{[0,t[} h(t-s) dZ_j^N(s) \right)$. Tout d'abord, il est clair que cette somme va exploser quand N tend vers $+\infty$ (car c'est une somme de N termes normalisée en $1/\sqrt{N} \dots$). Afin de garantir que cette somme converge, on va considérer des variables aléatoires iid centrées sur les instants de saut des processus Z_j^N. On pourrait penser à reformuler les définitions II.A.3 et II.A.4 avec des intensités stochastiques de la forme :

$$\lambda_i(t) = f\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \int_{]-\infty,t[} h(t-s) U_j(s) dZ_j^N(s) \right)$$

où les $(U_j(s))_{j \in \mathbb{N}^*, s \in \mathbb{R}}$ sont des variables iid centrées. Le problème avec ces variables $U_j(s)$, c'est que les processus $(U_j(s))_{s \in \mathbb{R}}$ ne sont pas prévisibles, et donc cela empêcherait d'utiliser les propriétés des intensités stochastiques. On va donc introduire ces variables de saut d'une manière similaire à l'équation (31). On notera μ la loi des sauts. L'idée est de "coder" les amplitudes des sauts dans les processus de Poissons que l'on amincit. Il faut faire attention à un point, ici on a besoin de connaître l'amplitude des sauts (et pas seulement les instants de sauts) sur $\mathbb{R}_-$ pour définir la dynamique des processus de Hawkes. C'est pour cela que la condition initiale doit prendre en compte ces sauts.

Définition III.B.1 (Processus de Hawkes avec sauts aléatoires avec condition initiale) :

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $Z_1, \dots, Z_N$ des processus ponctuels sur $\mathbb{R}$. Soient $\pi_1, \dots, \pi_N$ des mesures de Poisson sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ d'intensité $dt.dx.d\mu_j(u)$ où μ_j $(1 \leq j \leq N)$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ centrée et réduite. Soit $\mathcal{P}$ un prédicat sur les $N-$uplets de parties au plus dénombrables de $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}$ (chaque couple $(T, U) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}$ correspond à un instant de saut T et une amplitude U). Pour $1 \leq i \leq N$, notons $\mathcal{T}_i \times \mathcal{U}_i$ les points de $Z_{i|\mathbb{R}_-}$ et les amplitudes de sauts correspondantes.

On dit que $(Z_1, \dots, Z_N)$ est un système de processus de Hawkes de loi de sauts $(\mu_1, \dots, \mu_N)$ de condition initiale $\mathcal{P}$ si :

— $\mathcal{P}(\mathcal{T}_1 \times \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{T}_N \times \mathcal{U}_N)$ *est vrai*

— $\forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \forall 1 \leq i \leq N, Z_i(C) = \displaystyle\int_{C\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x\leq\lambda_i(t)\}} d\pi_i(t,x,u)$

où $\forall t \geq 0, \lambda_i(t) = f_i\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}\sum_{(T_j,U_j)\in\mathcal{T}_j\times\mathcal{U}_j} U_j h_{ji}(t-T_j) + \displaystyle\int_{]0,t[\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} u h_{ji}(t-s)\mathbb{1}_{\{x\leq\lambda_j(s)\}} d\pi_j(s,x,u)\right)$

Définition III.B.2 (Processus de Hawkes avec sauts aléatoires sans condition initiale) :

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $Z_1, \ldots, Z_N$ des processus ponctuels sur $\mathbb{R}$. Soient $\pi_1, \ldots, \pi_N$ des mesures de Poisson sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ d'intensité $dt.dx.d\mu_j(u)$ où μ_j $(1 \leq j \leq N)$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ centrée et réduite.

On dit que $(Z_1, \ldots, Z_N)$ est un système de processus de Hawkes de loi de sauts $(\mu_1, \ldots, \mu_N)$ sans condition initiale si :

$\forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall 1 \leq i \leq N, Z_i(C) = \displaystyle\int_{C\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x\leq\lambda_i(t)\}} d\pi_i(t,x,u)$

où $\forall t \in \mathbb{R}, \lambda_i(t) = f_i\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}\displaystyle\int_{]-\infty,t[\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} u h_{ji}(t-s)\mathbb{1}_{\{x\leq\lambda_j(s)\}} d\pi_j(s,x,u)\right)$

On remarque que si on prend pour μ la mesure de dirac en 1, on retrouve exactement la relation (31).

Dans la suite, on s'intéressera aux processus $X_{i,t}^N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\displaystyle\int_{]-\infty,t]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} u h_{ji}(t-s)\mathbb{1}_{\{x\leq\lambda_j(s)\}} d\pi_j(s,x,u)$. Donc la condition initiale de la définition III.B.1 peut permettre d'imposer des conditions sur $X_{i,0}^N$ par exemple. Toutefois, dans la suite, on n'utilisera que la définition III.B.2 (ie sans condition initiale).

On va d'abord démontrer l'existence d'un tel système de processus. La première remarque qu'on peut faire est que la proposition II.C.3 ne peut pas s'appliquer puisque la loi μ est centrée, donc la variable d'intégration u prend des valeurs positives et négatives. On pourrait adapter la preuve de la proposition III.A.5, mais on va donner une preuve similaire avec des hypothèses un peu plus fortes qui permettront de travailler sur des processus ponctuels définis sur $\mathbb{R}$ (et pas seulement sur $\mathbb{R}_+$).

Pour prouver le théorème d'existence, on va avoir besoin d'un critère de convergence presque sûr :

Lemme III.B.3 :

Soient $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{R}_+^*$ qui sont les termes généraux de séries convergentes. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(|X_{n+1} - X_n| \geq \varepsilon_n\right) \leq \lambda_n$$

Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement.

preuve :

Soient $A_n \bigcup_{k\geq n}\{|X_{k+1} - X_k| \geq \varepsilon_k\}$ et $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Comme $\mathbb{P}(A_n) \leq \lambda_n$ qui est le terme général d'une série convergente, on sait, par le lemme de Borel-Cantelli, que $\mathbb{P}(A) = 0$.

D'où, pour presque tout ω, $\exists n_0, \forall k \geq n_0, |X_{k+1}(\omega) - X_k(\omega)| < \varepsilon_k$. Comme ε_k est le terme général d'une série convergente, on sait que $(X_k(\omega))_k$ est une suite de Cauchy, donc converge. ■

Proposition III.B.4 :

Soient $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction C_i−lipschitzienne $(1 \leq i \leq N)$, et $h_{ji} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ intégrable $(1 \leq i, j \leq N)$, et $(\mu_j)_{j\in[\![1,N]\!]}$ des mesures de probabilités tels que $\forall j, \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |u| d\mu_j(u) \leq M_j$. On suppose de plus que la norme subordonnée à la norme infini de la matrice A définie par ces coefficients $a_{ij} = C_i M_j \displaystyle\int_0^{+\infty} |h_{ji}(t)|dt$ est strictement inférieure à 1.

Alors il existe un système de processus de Hawkes $(Z_1, \ldots, Z_N)$ de loi de sauts $(\mu_1, \ldots, \mu_N)$ sans condition initiale. De plus, ces processus sont stationnaires, et pour tout $1 \leq i \leq N, \forall a < b, \mathbb{E}\left[Z_i([a,b])\right] < +\infty$.

preuve :

On pose $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'espace canonique d'un $N-$uplet de processus ponctuels de Poisson $(\pi_1, \ldots, \pi_N)$ d'intensités respectives $dt.dx.d\mu_j(u)$ $(1 \leq j \leq N)$.

On réutilise le schéma d'itération de Picard :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, & \lambda_i^{(0)}(t) = 0 & (a) \\ \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), & Z_i^{(n)}(C) = \int_{C \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \mathbb{1}_{\left\{x \leq \lambda_i^{(n)}(t)\right\}} d\pi_i(t,x,u) & (b) \\ \forall t \in \mathbb{R}, & \lambda_i^{(n+1)}(t) = f_i\left(\sum_{j=1}^{N} \int_{]-\infty,t[\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} u h_{ji}(t-s) \mathbb{1}_{\{x \leq \lambda_j^{(n)}(s)\}} d\pi_j(s,x,u)\right) & (c) \end{cases}$$

Tout d'abord, il est clair que les processus $Z_i^{(n)}$ et $Z_i^{(n+1)} - Z_i^{(n)}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq i \leq N$) sont stationnaires par le lemme II.B.6.

Posons $\lambda^{(n)}(t) = (\lambda_1^{(n)}(t), \ldots, \lambda_N^{(n)}(t))$ (on identifiera le vecteur avec la matrice unicolonne correspondante).

Étape 1 : *Montrons que, pour tout t, $\left|\left|\mathbb{E}\left[\left|\lambda^{(n+1)}(t) - \lambda^{(n)}(t)\right|\right]\right|\right|_\infty$ est le terme général d'une série convergente.*

Pour tout $1 \leq i \leq N$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\lambda_i^{(n+1)}(t) - \lambda_i^{(n)}(t)\right|\right] &\leq C_i \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} \int_{]-\infty,t[\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} |u|.|h_{ji}(t-s)| \left|\mathbb{1}_{\{x \leq \lambda_j^{(n)}(s)\}} - \mathbb{1}_{\{x \leq \lambda_j^{(n-1)}(s)\}}\right| d\pi_j(s,x,u)\right] \\
&= C_i \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{t} \int_{\mathbb{R}} |u|.|h_{ji}(t-s)| \left|\lambda_j^{(n)}(s) - \lambda_j^{(n-1)}(s)\right| d\mu_j(u) ds\right] \\
&\leq C_i \sum_{j=1}^{N} M_j \int_{-\infty}^{t} |h_{ji}(t-s)| \mathbb{E}\left[\left|\lambda_j^{(n)}(s) - \lambda_j^{(n-1)}(s)\right|\right] ds \\
&= \sum_{j=1}^{N} C_i M_j \mathbb{E}\left[\left|\lambda_j^{(n)}(0) - \lambda_j^{(n-1)}(0)\right|\right] \int_{-\infty}^{t} |h_{ji}(t-s)| ds
\end{aligned}$$

La première égalité vient du lemme I.D.6, la dernière égalité vient de la stationnarité du processus $|Z_i^{(n)} - Z_i^{(n-1)}|$ et du lemme II.B.4. Pour montrer que ce lemme est bien applicable, il suffit de montrer que $t \mapsto \mathbb{E}[\lambda_i(t)]$ est localement bornée (cf la remarque après le lemme II.B.4), et ceci est évident par récurrence, car si on suppose que les $\lambda_j^{(n)}$ sont bornées, on a alors $\mathbb{E}\left[\lambda_i^{(n+1)}(t)\right] \leq f_i(0) + C_i \mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^{N} \int_{]-\infty,t[\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} u h_{ji}(t-s) \mathbb{1}_{\{x \lambda_j^{(n)}(s)\}} d\pi_j(s,x,u)\right|\right]$ et donc $\mathbb{E}\left[\lambda_i^{(n+1)}(t)\right] \leq f_i(0) + C_i \sum_{j=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} |u| d\mu_j(u)\right) \left(\int_{\mathbb{R}_+} |h_{ji}(s)| ds\right) \mathbb{E}\left[\lambda_j^{(n)}(t)\right]$

Finalement, on a donc

$$\left|\left|\mathbb{E}\left[\left|\lambda^{(n+1)}(t) - \lambda^{(n)}(t)\right|\right]\right|\right|_\infty \leq \left|\left|A\mathbb{E}\left[\left|\lambda^{(n)}(t) - \lambda^{(n-1)}(t)\right|\right]\right|\right|_\infty \leq |||A|||. \left|\left|\mathbb{E}\left[\left|\lambda^{(n)}(t) - \lambda^{(n-1)}(t)\right|\right]\right|\right|_\infty$$

Comme on a supposé que $|||A||| < 1$, on a bien montré que $\left|\left|\mathbb{E}\left[\left|\lambda^{(n+1)}(t) - \lambda^{(n)}(t)\right|\right]\right|\right|_\infty$ est le terme général d'une série convergente.

On peut donc poser $\lambda_i(t) = \sum_{n \geq 0} \lambda_i^{(n+1)}(t) - \lambda_i^{(n)}(t)$, et on sait que $(\lambda_i^{(n)}(t))_n$ converge vers $\lambda_i(t)$ dans L^1. On sait notamment que $\left|\left|\mathbb{E}\left[\left|\lambda^{(n+1)}(t) - \lambda^{(n)}(t)\right|\right]\right|\right|_\infty \leq |||A|||^n K$ où $K = \max_{1 \leq i \leq N} \mathbb{E}\left[|\lambda_i^{(1)}(t)|\right] = \max_{1 \leq i \leq N} f_i(0)$

Et, par l'inégalité de Markov, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\lambda_i^{(n+1)}(t) - \lambda_i^{(n)}(t)\right| \geq |||A|||^{n/2}\right) &\leq |||A|||^{-n/2} \mathbb{E}\left[\left|\lambda_i^{(n+1)}(t) - \lambda_i^{(n)}(t)\right|\right] \\
&\leq |||A|||^{-n/2} \left|\left|\mathbb{E}\left[\left|\lambda^{(n)}(t) - \lambda^{(n-1)}(t)\right|\right]\right|\right|_\infty \\
&\leq |||A|||^{n/2} K
\end{aligned}$$

Donc, d'après le lemme III.B.3, on sait que $(\lambda_i^{(n)}(t))_n$ converge presque sûrement vers $\lambda_i(t)$

Étape 2 : *Maintenant, on va montrer la convergence des processus* $Z_i^{(n)}$

Pour tout borélien borné C, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\left(\left|Z_i^{(n+1)} - Z_i^{(n)}\right|(C) \neq 0\right) &\leq \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[\left|Z_i^{(n+1)} - Z_i^{(n)}\right|(C)\right] \\
&= \left(\int_C ds\right) \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[\left|\lambda_i^{(n+1)}(0) - \lambda_i^{(n)}(0)\right|\right]
\end{aligned}$$

où l'inégalité vient du fait que $\left|Z_i^{(n+1)} - Z_i^{(n)}\right|(C)$ est à valeurs entières, et l'égalité vient de la stationnarité de $\lambda_i^{(n+1)} - \lambda_i^{(n)}$.

Et donc, par le lemme de Borel-Cantelli, on sait que l'événement $\bigcap_n \bigcup_{k\geq n} \left\{\left|Z_i^{(n+1)} - Z_i^{(n)}\right|(C) \neq 0\right\}$ est de probabilité nulle, et donc on sait que, presque sûrement, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(Z_i^{(k)}(C))_{k\geq n_0}$ est constante.

Étape 3 : *Il suffit maintenant de prouver deux points :* $Z_i(C) = \int_{C\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x\leq\lambda_i(t)\}} d\pi_i(t,x,u)$ *et* $\lambda_i(t) = f_i\left(\sum_{j=1}^{N} \int_{]-\infty,t[\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} u h_{ji}(t-s) \mathbb{1}_{\{x\leq\lambda_j(s)\}} d\pi_j(s,x,u)\right)$

Le premier point vient du fait que, pour tout borélien borné C, on a (par le lemme de Fatou)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_C |Z_i(ds) - \pi_i(ds,[0,\lambda_i(s)],\times\mathbb{R})|\right] &\leq \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\int_C \left|\pi_i(ds,[0,\lambda_i^{(n)}(s)],\times\mathbb{R}) - \pi_i(ds,[0,\lambda_i(s)],\times\mathbb{R})\right|\right] \\
&= \left(\int_C ds\right) \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[|\lambda_i^{(n)}(0) - \lambda_i(0)\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pour le second point, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|\lambda_i(t) - f_i\left(\sum_{j=1}^{N} \int_{]-\infty,t[} u h_{ji}(t-s) \mathbb{1}_{\{x\leq\lambda_j(s)\}} d\pi_j(s,x,u)\right)\right|\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[|\lambda_i(t) - \lambda_i^{(n)}(t)|\right] + C_i \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{N} \int_{]-\infty,t[} |u|.|h_{ji}(t-s)| \left|\mathbb{1}_{\{x\leq\lambda_j^{(n-1)}(s)\}} - \mathbb{1}_{\{x\leq\lambda_j(s)\}}\right| d\pi_j(s,x,u)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[|\lambda_i(t) - \lambda_i^{(n)}(t)|\right] + C_i \sum_{j=1}^{N} \left(\int_0^{\infty} |h_{ji}(s)| ds\right) \mathbb{E}\left[\lambda_j(0) - \lambda_j^{(n-1)}(0)\right]
\end{aligned}$$

ce qui tend bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$

Pour finir la preuve, il reste à montrer que $\mathbb{E}[Z_i([a,b])] < +\infty$ pour tout i et tout $a < b$. Ceci est évident, car par stationnarité, on a $\mathbb{E}[Z_i([a,b])] = \mathbb{E}\left[\int_a^b \lambda_i(s) ds\right] = (b-a)\mathbb{E}[\lambda_i(0)]$, qui est la somme d'une série absolument convergente, donc fini. Par ailleurs, on avait bien le droit d'utiliser le lemme II.B.4 à λ_i, puisque $t \mapsto \mathbb{E}[\lambda_i(t)]$ est localement bornée. En effet, $\mathbb{E}[\lambda_i(t)] \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\left|\lambda_i^{(n+1)}(t) - \lambda_i^{(n)}(t)\right|\right] \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |||A|||^n K = \frac{K}{1-|||A|||}$

■

La preuve de la proposition III.B.4 est une adaptation directe de la preuve du théorème 7 de [Brémaud et Massoulié, 1996]

La proposition III.B.4 reste vraie si on remplace la condition "norme subordonnée à la norme infini de A est strictement inférieure à 1" par la condition plus générale "rayon spectral de A est strictement inférieur à 1".

Dans la suite, on pose $f_i = f$ (pour $1 \leq i \leq n$) et $h_{ji} = \frac{1}{\sqrt{N}} h$ (pour $1 \leq i, j \leq N$). De plus on fixe une suite de processus ponctuels de Poisson $(\pi_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ d'intensité $dt.dx.d\mu(u)$ (où μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$) et on considére un système de processus de Hawkes $(Z_1^N,\dots,Z_N^N)$ avec loi de sauts $(\mu_1,\dots,\mu_N)$ où $\mu_i=\mu$ (pour $1\le i\le N$) associé aux processus $(\pi_1,\dots,\pi_N)$. On n'étudiera pas directement les processus Z_j^N, mais plutôt les processus $(X_t^N)_{t\in\mathbb{R}}$ définis par

$$X_t^N=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^N\int_{]-\infty,t]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}uh(t-s)\mathbb{1}_{\{x\le\lambda_j^N(s)\}}d\pi_j(s,x,u) \tag{38}$$

Le lien entre les processus $(X_t^N)_t$ et les processus Z_j^N, c'est que les processus Z_j^N admettent pour intensité stochastique $\lambda_j^N(t)=\lambda^N(t)=f\left(X_{t-}^N\right)$.

Par définition, on voit que $(X_t^N)_t$ est un processus de Markov déterministe par morceaux et continue à droite. En effet, ce qui est stochastique dans ce processus, ce sont les instants de sauts du processus $(X_t^N)_t$ (qui correpondent aux points des processus ponctuels $Z_1^N,\dots,Z_N^N$) et les amplitudes des sauts, qui sont données par la mesure de probabilités μ (plus précisément, si $s\in Z_j^N$, alors le processus X_t^N a un saut à l'instant s d'amplitude $h(0)U$ où U suit la loi μ), de plus les amplitudes de deux sauts différents sont indépendantes (ceci est garanti par la propriété d'indépendance des processus de Poisson). On est donc dans un bon cadre pour faire du calcul stochastique.

Proposition III.B.5 (Dynamique de X_t^N) :
Soit $(X_t^N)_t$ le processus défini à (38) avec $h(t)=e^{-\alpha t}$, supposons que pour tout $1\le j\le N$, pour tout $a<b, Z_j([a,b])<+\infty$ ps. On a alors :

$$dX_t^N=-\alpha X_t^N dt+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^N\int_{(x,u)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}u\mathbb{1}_{\{x\le\lambda^N(t)\}}d\pi_j(t,x,u)$$

preuve :

On a

$$e^{\alpha t}X_t^N=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^N\int_{]-\infty,t]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}ue^{\alpha s}\mathbb{1}_{\{x\le\lambda^N(s)\}}d\pi_j(s,x,u) \tag{39}$$

Notons $\varphi_j(t)=\int_{]-\infty,t]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}ue^{\alpha s}\mathbb{1}_{\{x\le\lambda^N(s)\}}d\pi_j(s,x,u)$.

Montrons que φ_j est à variations bornées.

Notons $F^+(t)=\int_{]-\infty,t]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^*}ue^{\alpha s}\mathbb{1}_{\{x\le\lambda^N(s)\}}d\pi_j(s,x,u)$ et $F^-(t)=\int_{]-\infty,t]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_-^*}ue^{\alpha s}\mathbb{1}_{\{x\le\lambda^N(s)\}}d\pi_j(s,x,u)$.

Alors F^+ et F^- sont positives, croissantes, continues à droites, finies ps (en effet, le nombre de sauts sur $[a,b]$ est donné par $\sum_{j=1}^N Z_j([a,b])<+\infty$ ps et les amplitudes sont aussi finies) et vérifient $\varphi_j=F^+-F^-$. On sait donc que φ_j est à variations bornées.

On sait donc aussi que $(X_t^N)_t$ est à variations bornées. On peut donc appliquer la formule d'intégration par parties pour avoir

$$d\left(e^{\alpha t}X_t^N\right)=\alpha e^{\alpha t}X_t^N dt+e^{\alpha t}dX_t^N$$

Par ailleurs, en appliquant la formule d'Ito, on obtient

$$d\varphi_j(t)=e^{\alpha t}\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}u\mathbb{1}_{\{x\le\lambda^N(t)\}}d\pi_j(t,x,u)$$

En injectant ces deux dernières égalités dans l'équation (39), on obtient

$$\alpha e^{\alpha t}X_t^N dt+e^{\alpha t}dX_t^N=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^N e^{\alpha t}\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}u\mathbb{1}_{\{x\le\lambda^N(t)\}}d\pi_j(t,x,u)$$

■

Lemme III.B.6 :

Soit $(X_t^N)_t$ le processus défini à (38) tel que h est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et admet un prolongement (que l'on note toujours h) tel que $|h|$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ (par exemple $h(t) = e^{-\alpha t}$) et tel que le processus $(\lambda^N(t))_t$ est stationnaire et vérifie $\mathbb{E}\left[\lambda^N(0)\right] < +\infty$ (ce qui est le cas avec les processus construits dans la proposition III.B.4). On suppose de plus que la loi μ admet un moment d'ordre 1.

Alors, pour tout $T \geq 0$ il existe une variable aléatoire positive W_T^N (indépendante de t) telle que $\mathbb{E}\left[W_T^N\right] < +\infty$ et presque sûrement $\forall t \in [-T,T], \left|X_t^N\right| \leq W_T^N$

preuve :

Soit $T \geq 0$ fixé. On a, pour tout $t \in [-T,T]$,

$$\left|X_t^N\right| \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \int_{]-\infty,T]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} |u||h(t-s)|\mathbb{1}_{\{x\leq\lambda^N(s)\}} d\pi_j(s,x,u)$$

On note $W_T^N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \int_{]-\infty,T]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} |u||h(T-s)|\mathbb{1}_{\{x\leq\lambda^N(s)\}} d\pi_j(s,x,u)$. Il suffit alors de montrer que $\mathbb{E}\left[W_T^N\right] < +\infty$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[W_T^N\right] &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}\left[\int_{]-\infty,T]} \int_{\mathbb{R}} |u||h(T-s)|\lambda^N(s) d\mu(u) ds\right] \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |u| d\mu(u)\right) \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \int_{]-\infty,T]} |h(T-s)| \mathbb{E}\left[\lambda^N(s)\right] ds \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |u| d\mu(u)\right) \mathbb{E}\left[\lambda^N(0)\right] \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}_+} |h(t)| dt
\end{aligned}$$

■

Le lemme III.B.6 reste vrai si on considère un λ^N non-stationnaire, mais alors il faut par exemple supposer que la fonction f est bornée. En effet, on peut alors majorer $\lambda(s)$ dans les formules directement puisque $\lambda^N(s) = f(X_{s-}^N)$.

Proposition III.B.7 (Générateur de X_t^N) :

Soit A^N le générateur de $(X_t^N)_t$ défini à (38) avec $h(t) = e^{-\alpha t}$. On reprend les hypothèses du lemme III.B.6, et on suppose de plus que la fonction f est continue et vérifie une inégalité du type $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq A.|x| + B$ où $A, B > 0$ sont fixés (ce qui est le cas par exemple si f est uniformément continue). Alors pour tout fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée, $\mathcal{C}^1$ et dérivée bornée, on a

$$A^N g(x) = -\alpha x g'(x) + N f(x) \int_{\Omega} \left[g\left(x + \frac{u}{\sqrt{N}}\right) - g(x)\right] d\mu(u)$$

preuve :

Dans toute la suite de la preuve, on fixe une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$. Par définition, $A^N g(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\mathbb{E}_x\left[g\left(X_t^N\right)\right] - g(x)\right)$

Comme $(X_t^N)_t$ est à variation bornée, on peut appliquer la formule d'Ito (avec sauts) pour obtenir :

$$g(X_t^N) - g(X_0^N) = \int_{]0,t]} g'(X_{s-}^N) dX_s^N + \sum_{0<s\leq t} \left(g(X_s^N) - g(X_{s-}^N) - g'(X_{s-}^N)\Delta X_s^N\right)$$

$$
\begin{aligned}
g(X_t^N) - g(X_0^N) &= -\alpha \int_{]0,t]} g'(X_{s-}^N) X_s^N ds + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \int_{]0,t]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} g'(X_{s-}^N) u \mathbb{1}_{\{z\leq\lambda^N(s)\}} d\pi_j(s,z,u) \\
&\quad + \sum_{0<s\leq t} \left(g(X_s^N) - g(X_{s-}^N)\right) - \sum_{0<s\leq t} g'(X_{s-}^N)\Delta X_s^N \\
&= -\alpha \int_{]0,t]} g'(X_{s-}^N) X_s^N ds + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \int_{]0,t]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} g'(X_{s-}^N) u \mathbb{1}_{\{z\leq\lambda^N(s)\}} d\pi_j(s,z,u) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N} \int_{]0,t]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \left[g\left(X_{s-}^N + \frac{u}{\sqrt{N}}\right) - g(X_{s-}^N)\right] \mathbb{1}_{\{z\leq\lambda^N(s)\}} d\pi_j(s,z,u) \\
&\quad - \textstyle\sum_{j=1}^{N} \displaystyle\int_{]0,t]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} g'(X_{s-}^N) \frac{u}{\sqrt{N}} \mathbb{1}_{\{z\leq\lambda^N(s)\}} d\pi_j(s,z,u) \\
&= -\alpha \int_{]0,t]} g'(X_{s-}^N) X_s^N ds + \sum_{j=1}^{N} \int_{]0,t]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \left[g\left(X_{s-}^N + \frac{u}{\sqrt{N}}\right) - g(X_{s-}^N)\right] \mathbb{1}_{\{z\leq\lambda^N(s)\}} d\pi_j(s,z,u)
\end{aligned}
$$

On a finalement

$$
g(X_t^N) - g(X_0^N) = -\alpha \int_{]0,t]} g'(X_{s-}^N) X_s^N ds + \sum_{j=1}^{N} \int_{]0,t]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \left[g\left(X_{s-}^N + \frac{u}{\sqrt{N}}\right) - g(X_{s-}^N)\right] \mathbb{1}_{\{z\leq\lambda^N(s)\}} d\pi_j(s,z,u)
$$

Donc, par échangeabilité des processus π_j, on a :

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{t}\left(\mathbb{E}_x\left[g(X_t^N)\right] - g(x)\right) &= -\alpha \mathbb{E}_x \left[\tfrac{1}{t} \int_0^t g'(X_s^N) X_s^N ds \right] \\
&\quad + N \mathbb{E}_x \left[\tfrac{1}{t} \int_{]0,t]\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \left[g\left(X_{s-}^N + \frac{u}{\sqrt{N}}\right) - g(X_{s-}^N)\right] \mathbb{1}_{\{z\leq\lambda^N s)\}} d\pi_1(s,z,u) \right]
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Notons $I_1(t)$ l'espérance de la première ligne ci-dessus, et $I_2(t)$ celle de la seconde.

Étape 1 : *Montrons que* $I_1(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} xg'(x)$

Posons $Y_t = \frac{1}{t}\displaystyle\int_0^t g'(X_s^N) X_s^N ds$. Soit T_1 le premier temps de saut de $(X_t^N)_{t\geq 0}$ (qui est aussi le premier temps de saut des $Z_j^N|\mathbb{R}_+$). On sait que, presque sûrement $T_1 > 0$ (puisque, pour tout j, $\mathbb{E}\left[Z_j^N(\{0\})\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^0 ds = 0\right]$ et que $Z_1([0,1]) < +\infty \quad ps$, car $\mathbb{E}\left[Z_1([0,1])\right] = \int_0^1 \mathbb{E}\left[\lambda(s)\right] ds = \mathbb{E}\left[\lambda(0) < +\infty\right]$). Soit donc ω fixé tel que $T_1(\omega) > 0$. On sait donc que $t \mapsto X_t^N$ est continue sur $[0, T_1(\omega)/2]$, et donc $t \mapsto \displaystyle\int_0^t g'(X_s^N) X_s^N ds$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, T_1(\omega)/2]$ de dérivée $t \mapsto g'(X_t^N) X_t^N$. On sait alors que, presque sûrement,

$$
Y_t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} g'(X_0^N) X_0^N
$$

Et, comme on a supposé que g' est bornée, et par le lemme III.B.6, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir :

$$
I_1(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} xg'(x)
$$

Étape 2 : *I* l suffit maintenant de montrer que $I_2(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f(x)\mathbb{E}\left[\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g\left(x + \frac{u}{\sqrt{N}}\right) - g(x) d\mu(u)\right]$

On sait que

$$
\begin{aligned}
I_2(t) &= \mathbb{E}_x \left[\tfrac{1}{t} \int_{]0,t]} \left[g\left(X_{s-}^N + \frac{u}{\sqrt{N}}\right) - g(X_{s-}^N) \mathbb{1}_{\{zleq\lambda^N(s)\}} \right] d\pi_1(s,z,u) \right] \\
&= \mathbb{E}_x \left[\tfrac{1}{t} \int_{]0,t]} \int_{\mathbb{R}} \left[g\left(X_s^N + \frac{u}{\sqrt{N}}\right) - g(X_s^N)\right] f(X_s^N) d\mu(u) ds \right]
\end{aligned}
$$

Pour alléger les notations, notons U une variable aléatoire de loi μ indépendante des $(Z_1^N,\dots,Z_N^N)$ et de $(X_t^N)_t$. Soit $\varphi(y)=f(y)\mathbb{E}\left[g\left(y+\frac{U}{\sqrt{N}}\right)-g(y)\right]$. Avec ces notations, on a

$$I_2(t)=\mathbb{E}_x\left[\frac{1}{t}\int_0^t\varphi(X_s^N)ds\right]$$

Comme, on a supposé f et g continues, et g bornées, on sait que φ est continue (par convergence dominée). Avec le même raison qu'on a fait pour $I_1(t)$, on sait donc que $\frac{1}{t}\int_0^t\varphi(X_s^N)ds$ converge vers $\varphi(X_0^N)$ quand t tend vers 0. Tout ce qu'il reste à faire est donc de justifier qu'on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour avoir $I_2(t)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}\varphi(x)=f(x)\int_{\mathbb{R}}\left[g\left(x+\frac{u}{\sqrt{N}}\right)-g(x)\right]d\mu(u)$.

Tout d'abord, il est clair que $|\varphi(y)|\le 2||g||_\infty f(y)\le 2||g||_\infty(A|y|+B)$ (c'est une des hypothèses sur f). On sait donc que $\left|\frac{1}{t}\int_0^t\varphi(X_s^N)ds\right|\le 2||g||_\infty\left(B+\frac{1}{t}\int_0^t W_1^N ds\right)\le 2||g||_\infty\left(B+W_1^N\right)$ où W_1^N est défini au lemme III.B.6.

■

Proposition III.B.8 (Générateur du système limite) :

On reprend les hypothèses de la proposition III.B.7. De plus, on suppose que la loi μ est centrée et de variance 1. Alors pour toute fonction g bornée et deux fois dérivable, on a :

$$A^Ng(x)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}-\alpha xg'(x)+\frac{1}{2}f(x)g''(x)$$

De plus, si on note $Ag(x)=-\alpha xg'(x)+\frac{1}{2}f(x)g''(x)$, et si on suppose que μ admet un moment d'ordre 3, alors on sait que, pour toute fonction g trois fois dérivable, on a

$$|Ag(x)-A^Ng(x)|\le|f(x)|.||g'''||_\infty\frac{\mathbb{E}\left[|U|^3\right]}{6\sqrt{N}}$$

où U suit la loi μ

preuve :

On sait que

$$A^Ng(x)=-\alpha xg'(x)+Nf(x)\int_\Omega\left[g\left(x+\frac{u}{\sqrt{N}}\right)-g(x)\right]d\mu(u)\tag{41}$$

En utilisant la formule de Taylor-Young à g supposée deux fois dérivable, on a

$$g\left(x+\frac{u}{\sqrt{N}}\right)-g(x)=\frac{u}{\sqrt{N}}g'(x)+\frac{u^2}{2N}g''(x)+o\left(1/N\right)$$

En injectant cette égalité dans (41), on a

$$\begin{array}{rcl} A^Ng(x) & = & -\alpha xg'(x)+\sqrt{N}f(x)g'(x)\left(\int_\Omega ud\mu(u)\right)+\frac{f(x)g''(x)}{2}\left(\int_\Omega u^2d\mu(u)\right)\\ & = & -\alpha xg'(x)+\frac{1}{2}f(x)g''(x)+o(1)\end{array}$$

Pour obtenir la dernière égalité, on rappelle que μ est la loi des variables $U_j(s)$ qui sont, par hypothèse, centrées et de variance 1.

Motrons la dernière partie de la proposition. Soit donc g une fonction trois fois dérivable. On a :

$$\left|A^Ng(x)-Ag(x)\right|\le|f(x)|\left|N\mathbb{E}\left[g\left(x+\frac{U}{\sqrt{N}}\right)-g(x)\right]-\frac{1}{2}g''(x)\right|$$

Comme $\mathbb{E}[U] = 0$ et $\mathbb{E}\left[U^2\right] = 1$, on a

$$\begin{aligned}\left|A^N g(x) - Ag(x)\right| &\leq |f(x)|N\left|\mathbb{E}\left[g\left(x+\tfrac{U}{\sqrt{N}}\right) - g(x) - \tfrac{U}{\sqrt{N}}g'(x) - \tfrac{U^2}{2N}g''(x)\right]\right| \\ &\leq |f(x)|N\mathbb{E}\left[\left|g\left(x+\tfrac{U}{\sqrt{N}}\right) - g(x) - \tfrac{U}{\sqrt{N}}g'(x) - \tfrac{U^2}{2N}g''(x)\right|\right]\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, on obtient

$$\left|A^N g(x) - Ag(x)\right| \leq |f(x)|.||g'''||_\infty \frac{\mathbb{E}\left[|U|^3\right]}{6\sqrt{N}}$$

■

On peut maintenant justifier l'appellation de "régime diffusif" puisqu'on reconnait dans la formule $Ag(x) = -\alpha x g'(x) + \frac{1}{2}f(x)g''(x)$ le générateur d'une diffusion $(X_t)_t$ qui est solution de l'EDS :

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sqrt{f(X_t)}dB_t$$

En particulier, si on suppose que $\inf_{\mathbb{R}} f > 0$, alors on sait que les coefficients de l'EDS sont lipschitziens, et donc qu'il y a unicité du processus $(X_t)_t$.

Bilan et Perspectives

Dans ce mémoire, on a étudié la convergence des systèmes de processus de Hawkes en interation $(Z_1, \ldots, Z_N)$ quand leur nombre tend vers l'infini. On a étudié deux cas. Le premier correspond à des interactions de type champ moyen, dont l'intensité des interactions est en $1/N$, dans ce cas, on peut donner les processus limites $\bar{Z}_i$ sous une forme relativement explicite. Le second correspond à des interactions en $1/\sqrt{N}$, dans ce cas, on a seulement la convergence selon les générateurs des processus $(X_t^N)_t$ qui sont liés aux processus Z_i par la formule $\mathbb{E}\left[dZ_i(t)\right] = \mathbb{E}\left[f(X_{t-}^N)dt\right]$. On pourrait essayer de démontrer d'autres types de convergence des processus $(X_t^N)_t$, comme une convergence selon les semi-groupes en utilisant les résultats de [Bally *et al.*, 2017], voir même une convergence plus forte comme dans l'espace de Skorokhod.

Ma contribution dans ce mémoire, au-delà d'organiser et présenter des résultats de différents articles et livres, a été de justifier la continuité de certaines fonctions dans la partie $III.A$ pour pouvoir appliquer le lemme III.A.3 (notamment le lemme III.A.4), ainsi que d'écrire les preuves détaillées de la partie $III.B$ (notamment d'introduire le lemme III.B.6).

Références

[Bally *et al.*, 2017] BALLY, V., GOREAC, D. et RABIET, V. (2017). Regularity and Stability for the Semigroup of Jump Diffusions with State-Dependent Intensity. *ArXiv e-prints*.

[Brémaud, 1981] BRÉMAUD, P. (1981). *Point Processes and Queues, Martingale Dynamics*. Springer-Verlag New York Inc.

[Brémaud et Massoulié, 1996] BRÉMAUD, P. et MASSOULIÉ, L. (1996). Stability of nonlinear hawkes processes. *The Annals of Probability*, 24(3):1563–1588.

[Chevallier, 2013] CHEVALLIER, J. (2013). Détection de motifs de dépendance entre neurones. Mémoire de D.E.A., Université de Nice Sophia-Antipolis.

[Delattre *et al.*, 2014] DELATTRE, S., FOURNIER, N. et HOFFMANN, M. (2014). High dimensional Hawkes processes. *ArXiv e-prints*.

[Ditlevsen et Löcherbach, 2017] DITLEVSEN, S. et LÖCHERBACH, E. (2017). Multi-class oscillating systems of interacting neurons. *Stochastic Processes and their Applications*, 127(6):1840–1869.

[Duquesne, 2017] DUQUESNE, T. (2017). Processus markoviens. Notes de cours, M2 "Probabilités et Modèles Aléatoires", Sorbonne Université.

[Löcherbach, 2017] LÖCHERBACH, E. (2017). Convergence to equilibrium for time inhomogeneous jump diffusions with state dependent jump intensity. *ArXiv e-prints*.