(diverses) questions de cours possibles :
- une division euclidienne (ex : $X^3 + 2X^2 - 5X + 6 = (X^2 + 3X - 2)(X - 1) + 4$)
- décomposition en polynômes irréductibles (existence ou unicité)
- polynômes interpolateurs de Lagrange
- à quelle condition peut-on identifier les polynômes et les fonctions polynomiale ?

cours : $P \in K[X]$ tel que $\deg P < n$ et tel que P s'annule au moins n fois, alors $P = 0$

définition : $P \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$ si : $\forall A, B \in \mathbb{Z}[X], P = A.B \Rightarrow A$ inversible ou B inversible (dans $\mathbb{Z}[X]$)

(1) Les polynômes suivants sont-ils irréductibles sur $\mathbb{Z}[X]$: $2X$, $2X + 3$, $X^2 + X + 1$, $X^2 - 2$

(2) $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$ deux à deux distincts ($n \geq 2$). Montrer que $(X - a_1) \cdots (X - a_n) - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$

cours : $K[X]$ est intègre

Pour $A \in \mathbb{Z}[X]$, on note $c(A)$ le pgcd de ses coefficients.

(1) Montrer que $\forall A, B \in \mathbb{Z}[X], c(A.B) = c(A)c(B)$ (hint : commencer par le cas $c(A) = c(B) = 1$)

(2) Soient $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ et p un nombre premier tels que :
- p ne divise pas a_n
- p divise a_k pour $0 \leq k \leq n - 1$
- p^2 ne divise pas a_0

Montrer que A est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$

cours : les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$ ssi $\exists A, B \in \mathbb{R}[X], P = A^2 + B^2$

On pose $P_n = nX^n - X^{-1} - \cdots - X - 1$. Combien de racines réelles P_n possède-t-il ?

cours : si a est racine de P d'ordre $n \geq 1$, alors a racine de P' d'ordre $n - 1$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que P admet deux racines réelles distinctes et tel que P'' divise P. Montrer que les racines de P sont simples.

Soient $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x > 0, U(x)\sin(x) + V(x)\cos(x)$. Montrer que $U = V = 0$.

Résoudre le système : $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xyz = -1/2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1/2 \end{cases}$

Soit $P_n = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$. P_n a-t-il des racines multiples ?

Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$: $P(2X) = P'(X).P''(X)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, admettant des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$.

(1) Montrer que f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$

(2) Si les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont égales, montrer que f atteint ses bornes.

(1) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que $\exists A, B \in \mathbb{R}_+, \forall x \geq 0, |f(x)| \leq A.x + B$

(2) Quelles sont les fonctions polynomiales uniformément continues sur $\mathbb{R}$?