questions de cours possibles :

- Une fonction croissante admet une limite à gauche en tout point. (peut-être un peu dur, mais utile pour un exo)
- Si f dérivable sur I tq $x \in I$ min local de f, alors $f'(x) = 0$
- Les inégalités larges se conservent par passage à la limite.
- Le théorème des accroissements finis.
- Le théorème de Rolle.
- Dérivée de arctan.
- $f' \geq 0$ sur $[a, b]$ ssi f croissante sur $[a, b]$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, admettant des limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$.
(1) Montrer que f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$
(2) Si les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont égales, montrer que f atteint ses bornes.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique et continue. Montrer que f est uniformément continue.

(1) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que $\exists A, B \in \mathbb{R}_+, \forall x \geq 0, |f(x)| \leq A.x + B$
(2) Quelles sont les fonctions polynomiales uniformément continues sur $\mathbb{R}$?

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure.

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Pour $h > 0$, on pose $w(h) = \sup\{|f(x) - f(y)| \ : \ x, y \in [0, 1] \text{ tels que } |x - y| \leq h\}$
(1) Montrer que : f est continue sur $[0, 1]$ ssi $w(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$
(2) Montrer que $\forall x, y \in [0, 1], w(x + y) \leq w(x) + w(y)$
(3) Montrer que $\forall h, \lambda > 0, w(\lambda h) \leq (\lambda + 1)w(h)$ (hint : commencer par montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, w(nh) \leq nw(h)$)

(1) Montrer que l'image d'un segment par une fonction continue est toujours un segment.
(2) L'image réciproque d'un segment par une fonction continue est-elle toujours un intervalle ?
(3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que : $|f(x)| \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ssi pour tout K compact, $f^{-1}(K)$ compact

Soit f une fonction polynomiale de degré impair. Montrer que f admet (au moins) une racine réelle.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} l \in [0, 1[$. Montrer que f admet un point fixe.
Donner un contre-exemple si $l = 1$.

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$. Montrer que f est discontinue en tout point.

(1) Pour $x \in \mathbb{Q}$, notons $(p(x), q(x)) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ l'unique couple d'entiers tels que $x = p(x)/q(x)$ et $p(x) \wedge q(x) = 1$.
Montrer que $\forall a \leq b, \forall N \in \mathbb{N}^*, \{x \in \mathbb{Q} \ : \ q(x) \leq N, \ x \in [a, b]\}$ est fini.
(2) Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q(x)} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{array} \right.$. Montrer que l'ensemble des points de continuité de f est exactement $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

(1) Soient $a \leq b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ ou $[a, b] \subseteq f([a, b])$.
(2) Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ croissante. Montrer que f admet un point fixe. (hint : considérer $A = \{x \in [0, 1] \ : \ x \leq f(x)\}$)
(3) Soit $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\exists x \in [0, 1], f(x) = g(x)$

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ croissante telle que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Montrer que f continue sur $[a, b]$.

Décrire l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$