Questions de cours (possibles) :

— f injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{0\}$

— Montrer que les fonctions paires et les fonctions impaires sont en somme directe

— de toute famille génératrice finie, on peut extraire une base

— f linéaire de E dans F (de même dim), B base de E, alors : f injective ssi $f(B)$ base de E

— F et G sont en somme directe ssi $\forall x \in F+G, \exists!(y,z) \in F \times G, x = y+z$

Soit E un espace vectoriel, soient F et G des sous-espaces de E

(1) Montrer que : $F \cup G$ est un sev de $E \Longleftrightarrow F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$

(2) On suppose que E est de dimension finie, et que F et G sont de même dimension r.
Montrer que F et G ont un supplémentaire commun.

Soit E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $f_\alpha : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\alpha x}$.
Montrer que $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est une famille libre de E.

Soit E un espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$, on suppose qu'il existe $n \geq 1$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$ (où $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$)

Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une famille libre de E.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que : $\exists f \in \mathcal{L}(E), v = f \circ u \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\ u \subseteq \mathrm{Ker}\ v$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

(1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Im}\ u$. Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\ u$ dans E.

(a) Montrer que : $\forall x \in E, \exists!(y,z) \in S \times S, x = y + u(z)$.
On pose $v(x) = z$ et $w(x) = y$

(b) Montrer que v et w sont linéaires, et calculer $u \circ v + v \circ u$ et $u \circ w + w \circ u$

(2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$. On suppose qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie la relation de 1)b). A-t-on toujours $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Im}\ u$?

(3) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$. On suppose qu'il existe $w \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie la relation de 1)b). A-t-on toujours $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Im}\ u$?

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que LASSE :

(i) $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Ker}\ u^2$

(ii) $\mathrm{Im}\ u = \mathrm{Im}\ u^2$

(iii) $E = \mathrm{Ker}\ u \oplus \mathrm{Im}\ u$

Soit E un espace vectoriel. Soient p et q des projecteurs de E tels que $\mathrm{Im}\ p \subseteq \mathrm{Ker}\ q$. Soit $r = p + q - pq$ (on note pq pour $p \circ q$)

(1) Montrer que r est un projecteur (hint : que pouvez-vous dire de qp ...)

(2) Montrer que $\mathrm{Ker}\ r = \mathrm{Ker}\ p \cap \mathrm{Ker}\ q$

(3) Montrer que $\mathrm{Im}\ r = \mathrm{Im}\ p \oplus \mathrm{Im}\ q$

Soit E l'espace des fonctions de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$. Soient $F = \{f \in E \ : \ f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\}$ et $G = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$
Montrer que $E = F \oplus G$

Soit E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ distincts, soit $G = \{f \in E \ : \ f(a_0) = \ldots = f(a_n) = 0\}$.
Montrer que $E = G \oplus \mathbb{R}_n[X]$

Soit E un espace de dimension finie.

(1) Montrer que $\forall f, g \in \mathcal{L}(E), |\mathrm{rg}\ f - \mathrm{rg}\ g| \leq \mathrm{rg}\ (f+g) \leq \mathrm{rg}\ f + \mathrm{rg}\ g$

(2) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = 0$ et $f + g$ inversible. Montrer que $\mathrm{rg}\ f + \mathrm{rg}\ g = \dim\ E$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et p, q des projecteurs de E.

(1) Montrer que : $p + q$ projecteur ssi $p \circ q = q \circ p = 0$

(2) Si $p + q$ est un projecteur, montrer que : $\mathrm{Ker}\ (p+q) = \mathrm{Ker}\ p \cap \mathrm{Ker}\ q$ et $\mathrm{Im}\ (p+q) = \mathrm{Im}\ p \oplus \mathrm{Im}\ q$