Exercice 1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I, et soit a un réel dans l'intérieur de I, tel que $f'(a) = 0$ et $f''(a) \neq 0$. Montrer que a est un extremum local de f. Donner un contre-exemple si $f''(a) = 0$.

Exercice 2. Soit f dérivable en a. Calculer $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f^2(a+3h) - f^2(a-h)}{h}$ (où f^2 est la fonction $f^2(x) = (f(x))^2$)

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x}$

Exercice 4. Soit $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin(1/x)$. Existe-t-il un prolongement de f continue sur $\mathbb{R}$? Si oui, est-il dérivable, $\mathcal{C}^1$? Même question avec $f(x) = x^2 \sin(1/x)$. $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ admet-elle un DL en 0 ? Si oui, jusqu'à quel ordre ?

Exercice 5.
1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x - x| \leq |x|^3/6$
2) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin(k/n^2)$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathbb{R}$.
1) Calculer $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h}$
2) Calculer $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$

Exercice 7.
1) Montrer que $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$
2) On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$, $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_n - 1/n$. Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes
3) En déduire le développement asymptotique de H_n à deux termes. (hint : que pouvez-vous dire de $H_n - \ln n$)

Exercice 8. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) = x - ax^\alpha + \underset{x \to 0}{o}(x^\alpha)$ où $a > 0$ et $\alpha > 1$.
1) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]0, \eta[, f(x) < x$
2) Trouver $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)^\beta - x^\beta$ admet une limite non-nulle en 0 (hint : on pourra écrire $f(x)^\beta = x^\beta \left(1 - ax^{\alpha-1} + x^{\alpha-1}\varepsilon(x)\right)^\beta$)
3) Soit $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in [0, \eta[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Trouver un équivalent de u_n (on admettra que si une suite $(v_n)_n$ converge vers une limite l, alors $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k$ converge aussi vers l)

Exercice 9. Donner le développement limité de $(1+x)^{1/x}$ à l'ordre 2 en 0

Exercice 10. Donner le développement limité de $\sqrt{3 + \cos x}$ à l'ordre 3 en 0

Exercice 11. Donner un équivalent de $2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

Exercice 12. Soient $a, b > 1$, calculer la limite de $\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$

Exercice 13. On admet que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution x_n sur $]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$
0) Donner le DL de arctan en 0 à l'ordre 2, en déduire en équivalent.
1) Trouver une relation entre x_n et $\arctan x_n$
2) En déduire le développement limité de x_n à deux termes (en fonction de n)
3) En déduire le développement limité de x_n à trois termes (hint : on rappelle que $\forall x > 0, \arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$)

Exercice 14. Soit $u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$. Calculer $l = \lim u_n$, puis donner un équivalent de $u_n - l$.

Exercice 15. Soit $(u_n)_n$ définie par $u_1 = 1, u_2 = u_3 = 2, u_4 = u_5 = u_6 = 3, \ldots$.
1) Montrer que u_n tend vers l'infini.
2) Donner un équivalent de u_n.

Exercice 16.
1) Soit $(v_n)_n$ une suite qui converge vers $l \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k$
2) On définit $(u_n)_n$ par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + 1/u_n$. Donner un équivalent de u_n (hint : on pourra s'intéresser à u_n^2)
3) On définit $(u_n)_n$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Donner un équivalent de u_n (hint : on pourra s'intéresser à e^{u_n})

Exercice 17. Déterminer la limite de $\left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n$

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et lipschitzienne.
1) Montrer que $\lambda := \inf\{C > 0 \ : \ \forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|\}$ est bien définie et vérifie $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x-y|$
2) Montrer que $||f'||_\infty \leq \lambda$
3) Montrer que $||f'||_\infty = \lambda$

Correction de l'exercice 1. $f''(a) \neq 0$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $f''(a) > 0$. Par continuité de f'' en a, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $h \in]-\eta, \eta[$, $f''(a+h) > 0$. Par l'égalité de Taylor-Lagrange, on a pour tout $h \in]-\eta, \eta[$:

$$\begin{aligned} f(a+h) =& f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(\theta_h) && \text{où } \theta_h \in]a-\eta, a+\eta[\\ =& f(a) + \frac{h^2}{2}f''(\theta_h) \\ >& f(a) \end{aligned}$$

Autrement dit, a est un minimum local de f. Un contre-exemple simple est donné par $f(x) = x^3$ et $a = 0$.

Correction de l'exercice 2. Notons $g = f^2$, on sait que g est dérivable en a, et que $g'(a) = 2f(a)f'(a)$

$$\begin{aligned} \frac{f^2(a+3h) - f^2(a-h)}{h} =& \frac{g(a+3h) - g(a-h)}{h} \\ =& \frac{g(a+3h) - g(a)}{h} - \frac{g(a-h) - g(a)}{h} \\ =& 3\frac{g(a+3h) - g(a)}{3h} + \frac{g(a-h) - g(a)}{-h} \\ \xrightarrow[h \to 0]{}& 3g'(a) + g'(a) = 4g'(a) = 8f(a)f'(a) \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3.

$$\begin{aligned} \frac{f(2x) - f(x)}{x} =& \frac{f(2x) - f(0)}{x} - \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ =& 2\frac{f(2x) - f(0)}{2x} - \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ \xrightarrow[x \to 0]{}& 2f'(0) - f'(0) = f'(0) \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4. $f(x) = \sin(1/x)$. Soit $x_n = (n\pi + \pi/2)^{-1}$, x_n converge vers 0 et $f(x_n) = (-1)^n$, donc $f(x_n)$ ne converge pas. Cela implique que f ne peut pas admettre de limite en 0, et donc on ne peut pas prolonger f par continuité en 0.

$f(x) = x^2\sin(1/x)$. On sait que pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \sin u \leq 1$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 \leq f(x) \leq x^2$. Par le théorème des gendarmes, on sait que f tend vers 0 en 0. Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Par ailleurs il est clair que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $\forall x \neq 0, f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos x$. De plus $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = x\sin(1/x)$ tend vers 0. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Donc f dérivable sur $\mathbb{R}$, mais f n'est pas $\mathcal{C}^1$ (car f' n'est pas continue en 0)

Correction de l'exercice 5.

1) D'après l'égalité de Taylor-Lagrange, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, il existe $\theta_x \in [0, \pi/2]$ tel que

$$\sin x = x - x^3/6 + \frac{x^4}{24}\sin(\theta_x) \geq x - x^3/6$$

De même, en allant à l'ordre 5, on a :

$$\sin x = x - x^3/6 + x^5/120 - \frac{x^6}{720}\sin(\phi_x) \leq x - x^3/6 + x^5/120$$

2) Si $x \in [0,1]$, on a $\sin x - x \geq -x^3/6 \geq -x^3$ et $\sin x - x \leq -x^3/6 + x^5/120 \leq -x^3/6 + x^3/120 \leq 0$
3) $\sum_{k=1}^n \sin(k/n^2) = \sum_{k=1}^n k/n^2 + \sum_{k=1}^n \left(\sin(k/n^2) - k/n^2\right) = \frac{n+1}{2n} + \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n = \sum_{k=1}^n \left(\sin(k/n^2) - k/n^2\right)$. On sait que ε_n tend vers 0 puisque $|\varepsilon_n| \leq \sum_{k=1^n} |\sin(k/n^2) - k/n^2| \leq \sum_{k=1}^n \left(k/n^2\right)^3 \leq \sum_{k=1}^n 1/n^3$ (en majorant grossièrement k/n^2 par $1/n$), donc $\varepsilon_n \leq 1/n^2$ tend vers 0. On sait alors que $\sum_{k=1}^n \sin(k/n^2)$ tend vers $1/2$.

Correction de l'exercice 6.

1) Comme (cf formule de Taylor-Young) $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$ et $f(a-h) = f(a) - hf'(a) + o(h)$, on sait que $\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h} = o(1)$ ie tend vers 0 quand h tend vers 0
2) On utilise la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + o(h^2)$ et $f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + o(h^2)$. Donc $\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} = f''(a) + o(1)$ ie tend vers $f''(a)$ quand h tend vers 0

Correction de l'exercice 7.

1) Par l'égalité de Taylor-Lagrange appliquée à $f(x) = \ln(1+x)$ en 0, on a $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{(1+\theta_x)^2}$ pour un certain $\theta_x \in]-1, +\infty[$. D'où $f(x) \leq x$
2) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0$, donc $(u_n)_n$ est décroissante. $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \geq 0$, donc $(v_n)_n$ est croissante. Et $u_n - v_n = 1/n$ tend bien vers 0.
3) on a $v_n \leq H_n - \ln n \leq u_n$, et comme $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes, on sait qu'elles ont une limite commune γ (dont on cherche pas à calculer la valeur), et donc par le théorème des gendarmes, on sait que $H_n - \ln n$ converge vers γ, autrement dit $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$

Correction de l'exercice 8. On peut écrire $f(x) = x - ax^\alpha + x^\alpha\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

1) $f(x) - x = x^\alpha(-a + \varepsilon(x))$. Comme $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0, on sait qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]0, \eta[$, $\varepsilon(x) < a$, en particulier $f(x) - x < 0$
2) $f(x) = x\left(1 - ax^{\alpha-1} + x^{\alpha-1}\varepsilon(x)\right)$, donc $f(x)^\beta = x^\beta\left(1 - \beta ax^{\alpha-1} + o\left(x^{\alpha-1}\right)\right) = x^\beta - a\beta x^{\alpha+\beta-1} + o\left(x^{\alpha+\beta-1}\right)$. Autrement dit $f(x)^\beta - x^\beta = -a\beta x^{\alpha+\beta-1} + o\left(x^{\alpha+\beta-1}\right)$, il faut donc prendre β tel que $\alpha + \beta - 1 = 0$, c'est-à-dire $\beta = 1 - \alpha$
3) La suite $(u_n)_n$ est décroissante (cf question 1)) et positive, donc converge vers le seul point fixe de f (par continuité de f) qui est 0 (cf question 1)). Comme $(u_n)_n$ converge vers 0, on sait d'après la question 2), que $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ converge vers $-a\beta = a(\alpha-1)$. D'après l'indication, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^\beta - u_k^\beta$ converge aussi vers $a(\alpha-1)$, et comme la somme précédente est télescopique, on sait que $\frac{u_n^\beta}{n}$ converge vers $a(\alpha-1)$, d'où u_n est équivalent à $(na(\alpha-1))^{1/\beta} = (na(\alpha-1))^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Correction de l'exercice 9.

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/x} =& e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\\ =& e^{\frac{1}{x}(x-x^2/2+x^3/3+o(x^3))}\\ =& e^{1-x/2+x^2/3+o(x^2)}\\ =& e\left(1-x/2+x^2/3+o(x^2)+x^2/4+o(x^2)\right)\\ =& e\left(1-x/2+\frac{7}{12}x^2\right)+o(x^2)\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10.

$$\begin{aligned}\sqrt{3+\cos x} =& \left(4-x^2/2+o(x^3)\right)^{1/2}\\ =& 2\left(1+x^2/8+o(x^3)\right)^{1/2}\\ =& 2\left(1+x^2/16+o(x^3)\right)\\ =& 2+x^2/8+o(x^3)\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 11.

$$\begin{aligned}2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} =& \sqrt{n}\left(2-(1+1/n)^{1/2}-(1-1/n)^{1/2}\right)\\ =& \sqrt{n}\left(2-(1+\frac{1}{2n}+o(1/n))-(1-\frac{1}{2n}+o(1/n))\right)\\ =& \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}+o(1/n)\right)\\ =& 1/\sqrt{n}+o(1/\sqrt{n})\sim 1/\sqrt{n}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 12.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n =& \left(\frac{e^{\ln a/n}+e^{\ln b/n}}{2}\right)^n\\ =& \left(\frac{1+\ln a/n+1+\ln b/n+o(1/n)}{2}\right)^n\\ =& \left(1+\frac{\ln a+\ln b}{2n}+o(1/n)\right)^n\\ =& \exp\left[n\left(\frac{\ln a+\ln b}{2n}+o(1/n)\right)\right]\\ =& \exp\left(\frac{\ln a+\ln b}{2}+o(1)\right)\\ \to& e^{\ln(ab)/2}=\sqrt{ab}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 13.

1) $x_n=\tan x_n=\tan(x_n-n\pi)$, comme $x_n-n\pi\in]-\pi/2,\pi/2[$, on a $\arctan x_n=\arctan\tan(x_n-n\pi)=x_n-n\pi$. Donc $x_n=n\pi+\arctan x_n$
2) $x_n\geq n\pi-\pi/2$, donc x_n tend vers l'infini, et $\arctan x_n$ tend vers $\pi/2$. On sait alors que $x_n=n\pi+\pi/2+o(1)$
3) On sait que $\arctan x_n+\arctan(1/x_n)=\pi/2$. De plus, $\arctan x_n=x_n-n\pi$ et $\arctan(1/x_n)\sim 1/x_n\sim 1/(n\pi)$, donc $\arctan(1/x_n)=1/(n\pi)+o(1/n)$, et on a finalement $x_n-n\pi+1/(n\pi)+o(1/n)=\pi/2$, autrement dit $x_n=n\pi+\pi/2-\frac{1}{n\pi}+o(1/n)$

Correction de l'exercice 14. $u_n = e^{n\ln(1+1/n)} = e^{n(1/n+o(1/n))} = e^{1+o(1)} \to e$. De plus on peut écrire $u_n - e = e^{n\ln(1+1/n)-1} = e^{n\ln(1/n-1/(2n^2)+o(1/n^2))-1} = e^{-\frac{1}{2n}+o(1/n)}$. Puisque $(u_n-e)e^{\frac{1}{2n}}$ tend vers 1, on sait que $u_n - e$ est équivalent à $e^{-\frac{1}{2n}}$ (ATTENTION les équivalents ne se conservent pas par passage à l'exponentiel!!!!)

Correction de l'exercice 15. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. Par définition de $(u_n)_n$, on sait que pour tout $n \geq 1$, pour tout $S_n \leq k \leq S_{n+1}-1$, $u_k = n$.

1) Pour tout $N \geq 1$ quelconque, on a pour tout $k \geq S_N, u_k \geq u_{S_N} = N$. Cela montre que u_n tend vers l'infini.
2) Soit $k \geq 1$, considérons l'entier n_k tel que $S_{n_k} \leq k \leq S_{n_k+1}-1$, en fait $n_k = u_k$. On a donc $u_k(u_k+1) \leq 2k \leq (u_k+1)(u_k+2)-2$, d'où $\frac{u_k(u_k+1)}{u_k^2} \leq 2\frac{k}{u_k^2} \leq \frac{(u_k+1)(u_k+2)}{u_k^2} - 2/u_k^2$, comme u_k tend vers l'infini (cf question 1), on sait que $2\frac{k}{u_k^2}$ tend vers 1 (cf théorème des gendarmes), autrement dit u_k^2 est équivalent à $2k$, d'où $u_k \sim \sqrt{2k}$

Correction de l'exercice 16.

1) Soit $\varepsilon > 0$ fixé, considérons n_ε tel que $\forall n \geq n_\varepsilon, |v_n - l| \leq \varepsilon$. On écrit $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k - l\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|v_k - l| = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_\varepsilon-1}|v_k-l| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_\varepsilon}^{n-1}|v_k - l| \leq \frac{n_\varepsilon}{n}M + \frac{n-n_\varepsilon-1}{n}\varepsilon \leq \frac{n_\varepsilon}{n}M + \varepsilon$ pour une certaine constante M indépendante de n et ε. Donc $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k - l\right| \leq 2\varepsilon$ pour n assez grand, ce qui prouve que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k$ converge vers l.
2) Déjà, $u_{n+1} = u_n + 1/u_n \geq u_n$, donc u_n est croissante, donc admet une limite. Si cette limite l était finie, elle vérifierait $l = l + 1/l$, ie $1/l = 0$ ce qui serait absurde, donc u_n tend vers l'infini.
Soit $v_n = u_n^2$, alors $v_{n+1} = v_n + 1/v_n + 2$. Comme v_n tend vers l'infini (car u_n tend vers l'infini), on a $v_{n+1} - v_n = 2 + 1/v_n$ tend vers 2. D'après la question 1), on sait alors que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k)$ tend vers 2, et par télescopage on sait alors que $\frac{v_n}{n}$ tend vers 2. Donc $v_n \sim 2n$, et $u_n \sim \sqrt{2n}$
3) Pour les mêmes raisons que précédemment, u_n tend vers l'infini. Donc $v_n = e^{u_n}$ aussi, et on a $v_{n+1} = e^{u_n + 1/v_n} = v_n e^{1/v_n}$. Donc $v_{n+1} - v_n = v_n\left(e^{1/v_n} - 1\right) = v_n(1/v_n + o(1/v_n)) = 1 + o(1)$. Donc $v_{n+1} - v_n$ tend vers 1, donc $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k)$ tend aussi vers 1, et $\frac{v_n}{n}$ tend vers 1. Autrement dit, on sait que $v_n = n + o(n)$. On a donc $u_n = \ln(n + o(n)) = \ln n + \ln(1 + o(1)) \sim \ln n$ (ATTENTION en général la composition à gauche des fonctions ne préserve pas les équivalents!!!!)

Correction de l'exercice 17.

$$\begin{aligned}
\left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right) &= \left(3 \times 2^{1/n} - 2 \times 3^{1/n}\right)^n \\
&= \left(3e^{\ln 2/n} - 2e^{\ln 3/n}\right)^n \\
&= (3(1 + \ln 2/n + o(1/n)) - 2(1 + \ln 3/n + o(1/n))^n \\
&= (1 + 3\ln 2/n - 2\ln 3/n + o(1/n))^n \\
&= e^{n\ln(1+3\ln 2/n - 2\ln 3/n + o(1/n))} \\
&= e^{3\ln 2 - 2\ln 3 + o(1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{3\ln 2 - 2\ln 3} = \frac{2^3}{3^2} = 8/9
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 18.

1) L'ensemble est non-vide et minorée par 0, donc la borne inférieure $\lambda \geq 0$ existe. Par ailleurs, il existe une suite λ_n d'éléments de l'ensemble tel que λ_n converge vers λ. On sait alors que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,
$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda_n |x - y|.$$
Il suffit alors de passer à la limite dans l'inégalité ci-dessus.
2) Pour tout $x \neq y$, $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq \lambda$. En faisant tendre y vers x, on obtient $|f'(x)| \leq \lambda$, et ceci est vrai quelque soit $x \in \mathbb{R}$.
3) D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leq ||f'||_\infty |x - y|$, ce qui implique que $\lambda \leq ||f'||_\infty$ (par définition de λ)