PC 1 : Espace de probabilités

Les exercices 1 et 6 sont corrigés pour vous donner un exemple de rédaction.

Exercice 1. Soit $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ un ensemble à quatre éléments, muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On définit les événements $A := \{\omega_1, \omega_2\}$, $B := \{\omega_1, \omega_3\}$ et $C := \{\omega_2, \omega_3\}$. Montrer que A, B et C sont indépendants deux à deux. Comparer $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ et $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

Solution. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, 4\}$, on a par définition $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 1/|\Omega| = 1/4$. D'une part, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\}) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) + \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = 1/2$ et, de même, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/2$. D'autre part, $A \cap B = \{\omega_1\}$ et donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$. Donc, on a montré que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, d'où l'indépendance de A et B. Les événements A et C sont indépendants pour la même raison, de même que B et C sont indépendants.
Comme $A \cap B \cap C = \emptyset$, on a $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$. En revanche, $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = 1/8$. Cela implique que A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 2. Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable et soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité quelconque sur Ω. On fixe deux événements A et B.

1. Supposons que $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$, montrer que $\frac{1}{12} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$. Exhiber des exemples qui montrent que les deux bornes peuvent être atteintes.
2. Montrer que si $A \cup B = \Omega$, alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c).$$

Exercice 3. On jette un dé (numéroté de 1 à 6) équilibré trois fois d'affilée.

1. Définisser un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ cohérent avec l'expérience.
2. Écriver chacun des événements suivants explicitement (en tant que partie de Ω), et calculer leurs probabilités
   — "obtenir au moins deux 1",
   — "au moins deux faces portent le même chiffre",
   — "la somme des trois faces est paire".

Exercice 4. Une famille a deux enfants. On considère les 4 configurations (s_1, s_2) avec s_i le sexe du i-ème enfant. On suppose que la probabilité d'avoir une fille est égale à celle d'avoir un garçon.

1. Calculer la probabilité pour que les deux enfants soient des filles sachant que le plus jeune enfant est une fille.
2. Calculer la probabilité pour que les deux enfants soient des filles sachant que l'enfant plus âgé est une fille.
3. Calculer la probabilité pour que les deux enfants soient des filles sachant que l'un des enfants est une fille.

Exercice 5. Soit $p \in]0,1[$ et soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires (mutuellement) indépendantes et de même loi donnée par :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p.$$

On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$. Montrer que si $p \neq \frac{1}{2}$, alors avec probabilité 1 la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ ne prend la valeur 0 qu'un nombre fini de fois.
On pourra faire appel à la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que l'espérance de X est finie si et seulement si la série $\sum_n \mathbb{P}(X > n)$ est convergente, et dans ce cas on a
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X > n).$$

Application : on considère une urne avec N boules numérotées de 1 à N, on tire successivement n ($n \in \mathbb{N}^*$) boules avec remise et on note $X_N^{(n)}$ le plus grand numéro sorti.

2. Calculer $\mathbb{P}(X_N^{(n)} \leq k)$ pour tout $k \geq 1$ et en déduire la valeur de $\mathbb{E}[X_N^{(n)}]$.
3. L'entier $n \geq 1$ étant fixé, montrer que la suite $(N^{-1}\mathbb{E}[X_N^{(n)}])_{N\geq 1}$ converge et calculer sa limite.

Solution.

1. C'est une simple application du théorème de Fubini pour les séries à termes positifs : comme $X \geq 0$, on peut toujours définir $\mathbb{E}[X] \in [0, +\infty]$, et alors en remarquant que $k = \sum_{n=0}^{k-1} 1$ pour tout $k \geq 0$ (une somme vide étant nulle), on a en échangeant deux séries à termes positifs :
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k\geq 0} k\,\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k\geq 0}\sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k>n} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X > n),$$
où la dernière égalité provient du fait que l'événement $\{X > n\}$ est la réunion disjointe des $\{X = k\}$ pour $k > n$.
2. On a $\{X_N^{(n)} \leq k\}$ si et seulement si les n boules, qui sont tirées indépendamment et uniformément au hasard, sont toutes plus petites que k, de sorte que
$$\mathbb{P}(X_N^{(n)} \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n \quad \text{pour tout } 0 \leq k \leq N.$$
On en déduit que
$$\mathbb{E}[X_N^{(n)}] = \sum_{k=0}^{N} 1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n = N + 1 - \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$
3. Pour tout $N \geq 1$, on a (somme de Riemann)
$$\frac{\mathbb{E}[X_N^{(n)}]}{N} = \frac{N+1}{N} - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 7. On modélise le jeu de pile ou face par une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires (mutellement) indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, en codant 1 pour succès (pile) et 0 pour échec (face) : $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0) = p$.

1. On pose $T_1 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}$. Que représente la variable aléatoire T_1, donner sa loi, son espérance et sa variance.
2. Soit $k \geq 2$; on s'intéresse à la variable T_k définie par $T_k = \inf\{n \geq 1 : \sum_{i=1}^n X_i = k\}$ représentant l'instant où le joueur réalise son k-ème succès. Déterminer la loi de T_k.
3. Posons $T_0 = 0$ et $\Delta_k = T_k - T_{k-1}$ pour $k \geq 1$. Montrer que les variables aléatoires Δ_k sont indépendantes et de même loi.

Exercices supplémentaires

Exercice 8. Trois boules sont tirées successivements d'une urne contenant des boules rouges et des boules bleues. On considère les événements $B_i =$ "la i-ème boule est bleue". Exprimer de manière ensembliste les événements suivants en fonction des événements B_i :

1. "toutes les boules sont bleues"
2. "au moins une boule est bleue"
3. "exactement une boule est bleue"
4. "au plus une boule est bleue"
5. "aucune boule n'est bleue"

Exercice 9. Un examen est réalisé pour dépister une maladie. Le risque qu'une personne donnée contracte cette maladie est 0.05. L'examen donne des faux positifs avec probabilité 0.01 et des faux négatifs avec probabilités 0.005.

1. Quelle est la probabilité que le test soit positif sur un individu tiré au hasard ?
2. Si un test se révèle positif, quelle est la probabilité que l'individu concerné soit malade ?

Exercice 10. On lance deux fois un dé équilibré. Soient F l'événement "le premier lancer fait 2", E "la somme des nombres fait 8" et G "la somme des nombres fait 7".

1. Les événements E et F sont-ils indépendants ?
2. Même question pour G et F.

Exercice 11. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements.

1. Si l'espace Ω est $\mathbb{R}$, donner $\limsup_n A_n$ et $\liminf_n A_n$ dans les trois cas suivants :
   (a) $A_n = [-1/n, 3 + 1/n]$,
   (b) $A_n = [-2 - (-1)^n, 2 + (-1)^n[$,
   (c) $A_n = p_n\mathbb{N}$, où $(p_n)_{n\geq 1}$ est la suite ordonnée des nombres premiers et $p_n\mathbb{N} = \{0, p_n, 2p_n, \ldots\}$ est l'ensemble des multiples de p_n.
2. Comparer les événements $\limsup_n(A_n \cup B_n)$ et $\limsup_n(A_n \cap B_n)$ respectivement avec $\limsup_n A_n$ et $\limsup_n B_n$.
3. Montrer que

$$\mathbb{P}(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_n \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup_n A_n).$$

   Donner les quantités ci-dessus quand $\Omega = \{-1, 1\}$, $\mathbb{P}(\{-1\}) = 1/4$, $\mathbb{P}(1) = 3/4$ et $A_n = \{(-1)^n\}$.

[1]

PC 2 : Tribus et espaces de probabilité – Variables aléatoires réelles – Densités de probabilité

Les exercices 1 et 4 sont corrigés pour vous donner un exemple de rédaction.

Exercice 1. On définit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ comme la plus petite tribu de $\mathbb{R}$ qui contient tous les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$. Montrer que les intervalles $]a, b]$, $]-\infty, a[$, $]a, b[$, $[a, b[$ et $[a, b]$ appartiennent à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tous réels $a < b$.

Solution. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

1. On a $]a, b] =]-\infty, a]^c \cap]-\infty, b]$. Comme une tribu est stable par intersection et passage au complémentaire, on obtient que $]a, b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. On a $]-\infty, a[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]-\infty, a - 1/n]$. Comme une tribu est stable par union dénombrable, on obtient bien que $]-\infty, a[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. Il suffit de remarquer que $]a, b[=]a, b] \cap]-\infty, b[$ et d'utiliser les deux points précédents.
4. On a $[a, b[=]-\infty, b[\cap [a, +\infty[=]-\infty, b[\cap]-\infty, a[^c$. Comme une tribu est stable par intersection et passage au complémentaire, on obtient le résultat escompté en utilisant le second point.
5. On a $[a, b] =]-\infty, b] \cap [a, +\infty[=]-\infty, b] \cap]-\infty, a[^c$. On conclut alors comme pour le point précédent.

Exercice 2. On appelle « boréliens » les ensembles dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$; on rappelle que la mesure de Lebesgue Leb est l'unique mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mathrm{Leb}(]a, b[) = b - a$ pour touts réels $a < b$.

1. Montrer que $\{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que tout sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ est borélien et de mesure de Lebesgue nulle.
3. Soit $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Montrer que N^c est dense dans $\mathbb{R}$.
   Indice : Vous pouvez raisonner par contraposée (ou par l'absurde...)

Exercice 3. On considère une fonction $X : \Omega \to E$.

1. Chargé de PC : Xavier Erny, xavier.erny@polytechnique.edu

1. Si $\mathcal{E}$ est une tribu sur E, montrer que $\mathcal{A} = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}\}$ est une tribu sur Ω.
2. Si $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$ est mesurable, et que μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$, montrer que $\mu_X : B \in \mathcal{E} \mapsto \mu(X^{-1}(B))$ est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$.

Exercice 4. Soit U une v.a. uniforme sur $[0,1]$. On définit $X = \min(U, 1-U)$ et $Y = \max(U, 1-U)$. Trouver les lois de X et Y.

Solution. La variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $[1/2, 1]$ et pour tout $t \in [1/2, 1]$,

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(U \leq t, 1-U \leq t) = \mathbb{P}(U \leq t, U \geq 1-t) = t - (1-t) = 2t - 1$$

donc Y suit la loi uniforme sur $[1/2, 1]$. On remarque que $X = 1 - Y$ et on en déduit que X suit la loi uniforme sur $[0, 1/2]$.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire de densité f et de fonction de répartition F, soit un intervalle A et soit $Y = \mathbb{1}_A(X)$. Donner la fonction de répartition de Y.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles distribuée selon une loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que $U = X/\lambda$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.
2. Donner la loi de la variable aléatoire $V = 1 + \lfloor X \rfloor$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.
3. Donner la loi de $W = \sqrt{X}$.
4. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = \min(X, a)$, où $a > 0$. La variable Y a-t-elle une densité ?

Exercice 7. Considérons une variable aléatoire X continue à valeurs positives représentant la durée de vie d'une ampoule, de fonction de répartition F et de densité f continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$. La fonction *taux de panne* associée est définie pour tout $t > 0$ par

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

1. Montrer que pour tout $t > 0$,

   $$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \mathbb{P}(X \in]t, t+\epsilon[\mid X > t) = \lambda(t).$$

   On interprète $\lambda(t)$ comme le taux de panne conditionnel instantané en supposant que l'ampoule fonctionnait encore au temps t.
2. Calculer la fonction taux de panne quand X suit une loi exponentielle.

3. Montrer que l'on peut caractériser la loi de X par sa fonction taux de panne λ : plus précisément, donner une expression de F en fonction de λ.
4. Exprimer la fonction de répartition associée à un taux de panne affine $\lambda : t \mapsto a + bt$. Pour $a = 0$, la loi obtenue est appelée *loi de Rayleigh*.

Exercice 8. On considère une fonction de répartition F sur $\mathbb{R}$ et on introduit son inverse généralisée définie par

$$p \in [0,1] \mapsto F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x;\ F(x) \geq p\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

1. Montrer en utilisant que F est continue à droite que pour tout $p \in]0,1[$, $F(F^{\leftarrow}(p)) \geq p$.
2. Montrer que $F^{\leftarrow}(p) \leq x$ si et seulement si $p \leq F(x)$ pour tout $p \in]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, la variable aléatoire $X = F^{\leftarrow}(U)$ a pour fonction de répartition F.
4. Déduire de la question précédente une méthode générale de simulation de variables aléatoires réelles et l'appliquer au cas d'une variable exponentielle.
5. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles dont la fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $p \in]0,1[$, $F \circ F^{\leftarrow}(p) = p$. En déduire la loi de $F_X(X)$?

Exercices supplémentaires

Exercice 9. Soit $A_0 = [0,1]$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = \frac{A_n}{3} \cup \frac{2+A_n}{3}$ (par exemple $A_1 = [0;1/3] \cup [2/3;1]$). On définit $K = \bigcap_n A_n$ l'ensemble triadique de Cantor.

1. Montrer que K est mesurable, compact et Lebesgue négligeable.
2. Montrer que, pour chaque n, A_n s'écrit comme la réunion des intervalles de l'ensemble suivant
$$\left\{ [q/3^n, (q+1)/3^n] \ : \ q = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 3^i \text{ avec } a_i \in \{0,2\} \right\}.$$
3. Montrer que $K = \{\sum_{k=1}^{+\infty} x_k/3^k \ : \ x_k \in \{0,2\}\}$. En déduire que K n'est pas dénombrable.

Exercice 10. Définissons $f_0(x) : x \in [0,1] \mapsto x \in [0,1]$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(3x)/2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/3 \\ 1/2 & \text{si } 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ 1/2 + f_n(3x-2)/2 & \text{si } 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Alternativement, en reprenant les notations de l'exercice 9, on peut définir

$$f_n(x) = (3/2)^n \int_0^x \mathbb{1}_{A_n}(t)dt. \tag{1}$$

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq 2^{-n}$. En déduire que $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f continue.
2. Montrer que la dérivée de f existe et est nulle Lebesgue-presque partout (Indice : vous pouvez utiliser la question 1. de l'exercice 9 et admettre que f_n vérifie (1)).
   Remarque : pourtant $f(0) = 0 < 1 = f(1)$

[1]

PC 3 : Variables aléatoires réelles - Espérance

1 Exercices corrigés

Exercice 1. Calculer l'espérance et la variance des lois : uniforme sur un intervalle $\mathcal{U}([a,b])$, exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ et gaussienne $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

Solution. Les trois lois sont à densité, disons f, on utilise alors les formules suivantes :

$$\mathbb{E}(X) = \int x f(x)\mathrm{d}x, \qquad \mathbb{E}(X^2) = \int x^2 f(x)\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

On trouve ainsi :

1. Loi uniforme, $X \sim \mathcal{U}([a,b])$:

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{a^2+ab+b^2}{3},$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

2. Loi exponentielle, $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \lambda x \,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \underset{[IPP]}{=} \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathbb{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 \,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \underset{[IPP]}{=} \frac{2}{\lambda^2}$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3. Loi gaussienne, $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$:

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu+\sigma u}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \mu,$$
$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{(\mu+\sigma u)^2}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \mu^2 + \sigma^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{u^2}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u.$$

   Par ailleurs, par intégration par partie,

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \frac{u^2}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u.$$

   On en déduit $\mathrm{Var}(X) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$.

Exercice 2. Soit X une variable distribuée selon la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de la variable $Y = \sqrt{X}$ par la méthode de la fonction muette.

Solution. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Par la formule de transfert, on a

$$\mathbb{E}(f(Y)) = \mathbb{E}(f(\sqrt{X})) = \lambda \int_0^{+\infty} f(\sqrt{x})\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

En faisant le changement de variable $x = u^2$, $u \geq 0$, dans l'intégrale précédente, on voit que

$$\mathbb{E}(f(Y)) = 2\lambda \int_0^{+\infty} f(u) u \,\mathrm{e}^{-\lambda u^2}\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} f(u)h(u)\mathrm{d}u,$$

avec $h(u) = 2\lambda u \,\mathrm{e}^{-\lambda u^2}\,\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(u)$, $u \in \mathbb{R}$. L'égalité précédente étant vraie pour toute fonction f mesurable bornée, on en déduit que Y admet la densité h.

1. Chargé de PC : Xavier ERNY, xavier.erny@polytechnique.edu

2 Exercices

Exercice 3. Si X est une variable aléatoire réelle, on note $L_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$ sa tranformée de Laplace (la valeur $L_X(t)$ n'est pas nécesairement finie pour tout $t \in \mathbb{R}$). Calculer $L_X(t)$ pour quand la loi de X est une des lois suivantes :

1. loi de Poisson de paramètre λ,
2. loi exponentielle de paramètre λ,
3. loi gaussienne de paramètre $(0, 1)$
   Indices :
   — vous pouvez utiliser que, pour tout $x, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta x - \frac{x^2}{2} = \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{2}(x - \beta)^2$,
   — et montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\pi/2}$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire de Cauchy, de densité donnée par $x \mapsto (\pi(1 + x^2))^{-1}$. Reconnaître la loi de $1/X$ en utilisant la méthode de la fonction muette.

Exercice 5. Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité.

1. On suppose que $\mathbb{P}(X = Y) = 1$. Montrer que X et Y ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.
2. On suppose que X et Y ont la même loi.
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.
   (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable centrée (i.e. telle que $\mathbb{E}(X) = 0$) et $a > 0$.

1. Montrer que $a \leq \mathbb{E}\left((a - X) \mathbb{1}_{\{X<a\}}\right) \leq \sqrt{\mathbb{P}(X < a)}\sqrt{\mathrm{Var}(X) + a^2}$.
2. En déduire que $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathrm{Var}(X)+a^2}$.

Exercice 7.

1. Montrer que si X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ alors $\mathbb{E}(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}$ pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que si X suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $\mathbb{E}(X^{2n}) = \prod_{k=1}^{n}(2k - 1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 8. Soit V une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, \pi]$. Déterminer la loi de $\sin V$.

Exercice 9. Montrer que si X est une variable aléatoire réelle et positive alors

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq x) \, \mathrm{d}x.$$

En déduire que pour tout entier $p \geq 1$ on a

$$\mathbb{E}(X^p) = p \int_0^\infty x^{p-1} \mathbb{P}(X \geq x) \, \mathrm{d}x.$$

Exercice 10. Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = \dfrac{\mathbb{1}_{[0,1]}(x)}{(\ln 2)(1 + x)}$. Montrer que $Y := \dfrac{1}{X} - \left[\dfrac{1}{X}\right]$ a même loi que X, où $[x]$ désigne la partie entière de x.

3 Exercices supplémentaires

Exercice 11 (Inégalité de Paley-Zygmund)**.** Soit X une variable aléatoire réelle positive d'espérance finie.

1. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $X \leq \lambda \mathbb{E}(X) + X \mathbb{1}_{\{X > \lambda \mathbb{E}(X)\}}$.
2. On suppose que, de plus, $0 < \mathbb{E}(X^2) < +\infty$. Montrerque pour tout $\lambda \in]0, 1[$ on a

$$\mathbb{P}(X > \lambda \mathbb{E}(X)) \geq (1 - \lambda)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

Exercice 12. Soit X une variable aléatoire de carré intégrable.

1. Montrer que $\mathrm{Var}(X) = \inf_{c \in \mathbb{R}} \mathbb{E}((X-c)^2)$.
2. En déduire que si X est à valeurs dans $[a,b]$, alors $\mathrm{Var}(X) \leq \frac{1}{4}(b-a)^2$.

Exercice 13. Montrer que si deux variables aléatoires *bornées* X et Y ont les mêmes moments, c'est-à-dire que $\mathbb{E}(X^n) = \mathbb{E}(Y^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors elles ont même loi. On pourra pour cela utiliser la densité des polynômes dans l'ensemble des fonctions continues sur un segment $K \subset \mathbb{R}$ (i.e. le théorème de Weierstrass).

Exercice 14. Soit f_0 la densité de $X_0 \coloneqq \mathrm{e}^Z$ où Z suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, c'est à dire

$$f_0(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(\ln x)^2/2} \qquad \text{pour tout } x > 0.$$

Pour tout réel $-1 < a < 1$ fixé, on définit la fonction $f_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ par

$$f_a(x) \coloneqq f_0(x)(1 + a\sin(2\pi\ln(x))).$$

Montrer que f_a est une densité possédant les mêmes moments que f_0, et en déduire que la loi log-normale n'est pas caractérisée par ses moments.

Exercice 15. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_X. Son entropie de Boltzmann–Shannon est définie par

$$H(X) \coloneqq -\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\ln(f_X(x))\mathrm{d}x$$

(avec la convention $0\ln(0) = 0$) lorsque la fonction $f_X \ln(f_X)$ est intégrable. On dit dans ce cas que X est d'entropie finie.

1. Montrer que si X est d'entropie finie alors pour tout $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $H(aX+b) = H(X)+\ln(|a|)$.
2. Calculer $H(X)$ dans chacun des cas suivants :
   (a) $X_1 \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$;
   (b) $X_2 \sim \mathcal{U}([a,b])$, $a < b$;
   (c) $X_3 \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.
3. On considère une variable aléatoire X admettant une densité de la forme $f_X(x) = \mathrm{e}^{-V(x)}\,\mathbb{1}_I(x)$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $V : I \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $\int_I \mathrm{e}^{-V(x)}\,\mathrm{d}x = 1$.
   (a) Montrer que si Y est une variable aléatoire d'entropie finie à valeurs dans I admettant une densité notée f_Y telle que $V(Y)$ est intégrable et vérifie $\mathbb{E}(V(Y)) = \mathbb{E}(V(X))$, alors

   $$H(X) - H(Y) = -\int_{\{f_Y>0\}} \ln(f_X(x)/f_Y(x))\,f_Y(x)\mathrm{d}x.$$

   En appliquant l'inégalité de Jensen, en déduire que $H(Y) \leq H(X)$.
   (b) En déduire que X_1 est la variable aléatoire d'entropie maximale parmi les variables Y d'entropie finie telles que $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2$.

[1]

PC 4 : Vecteurs aléatoires

1 Exercice corrigé

Exercice 1.

1. Déterminer la constante c pour que la fonction $f(x,y) = c(x^2+y^2)\exp(-\frac{x^2+y^2}{2})$ soit une densité sur $\mathbb{R}^2$. Si (X,Y) est un couple qui suit cette densité, déterminer ses lois marginales, ainsi que la covariance de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Soit (X,Y) un couple de v.a.r. de loi uniforme sur le disque $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$. Montrer que les v.a.r. X et Y ont même loi et calculer leur densité. Sont-elles indépendantes ?
3. Soit (X,Y) un vecteur aléatoire à densité. Montrer que $\mathbb{P}(X=Y)=0$. Si X est une v.a.r, le vecteur (X,X) a-t-il une densité ?

Solution. 1. En appliquant le théorème de Fubini à la fonction continue et positive f, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}(x^2+y^2)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}(x^2+y^2)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= 2\pi\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}x^2\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}x + y^2\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}y\\ &= 2\pi\int_{\mathbb{R}}\left(1+y^2\right)\frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}y\\ &= 4\pi,\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $x\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$ est une densité dont le moment d'ordre 2 vaut 1. On en déduit la valeur de la constante de renormalisation : $c = 1/(4\pi)$.
On sait que si (X,Y) est un vecteur aléatoire de densité f sur $\mathbb{R}^2$, alors X et Y admettent également des densités f_X et f_Y données par les formules

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{et} \qquad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Par symétrie de f, il est clair qu'ici $f_X = f_Y$ (autrement dit X et Y ont la même loi). Calculons f_X : pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f_X(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}(x^2+y^2)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0$$

par imparité. Calculons $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY)$:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2} xy(x^2+y^2)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

toujours par imparité. Finalement, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{8\pi}(x^2+1)(y^2+1)\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}$$

et donc $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ et on en déduit que X et Y ne sont pas indépendantes.

1. Chargé de PC : Xavier ERNY, xavier.erny@polytechnique.edu

2. Notons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. La densité d'un vecteur aléatoire (X,Y) uniformément distribué sur D est $f_{(X,Y)} = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_D$. Déterminons les lois marginales : si $|x| \leq 1$,

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x^2+y^2 \leq 1} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{|y| \leq \sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}y = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2},$$

et si $|x| > 1$, on voit que $f_X(x) = 0$. Par symétrie, $f_Y = f_X$. La loi commune de ces deux variables est appelée « loi du demi-cercle ».

3. En notant f une densité du couple (X,Y), on a en appliquant la formule de transfert

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = Y) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}} \, f(x,y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}} \, f(x,x) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f(x,x) \left(\int \mathbb{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}} \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f(x,x) \left(\int_{\{x\}} 1 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 0,
\end{aligned}$$

où la troisième égalité vient du théorème de Fubini, et la dernière du fait que le singleton $\{x\}$ est de mesure nulle. Pour toute variable aléatoire X, on a $\mathbb{P}(X = X) = 1$ et, donc d'après ce qui précède, le vecteur (X,X) n'a pas de densité sur $\mathbb{R}^2$.

2 Exercices de la PC

Exercice 2. Construire un couple de v.a. (X,Y) tel que : $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ et X n'est pas indépendante de Y.

Exercice 3. Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur aléatoire de matrice de variance covariance

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

1. Calculer la variance de $X_3 - \alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2$ pour $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
2. En déduire qu'il existe une constante c telle que $X_3 = X_1 + X_2 + c$ p.s.

Exercice 4. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont la loi a pour densité

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{2}{\pi} \, \mathrm{e}^{-x(1+y^2)} \, \mathbb{1}_{x,y \geq 0} \, .$$

1. Vérifier que $f_{(X,Y)}$ est bien une densité.
2. Déterminer les lois de X et de Y.

Exercice 5. Soit (X,Y) et (X',Y') des couples de variables aléatoires de densités respectives

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{4}(1+xy) \, \mathbb{1}_{[-1,1]^2}(x,y) \quad \text{et} \quad f_{(X',Y')}(x',y') = \frac{1}{4} \, \mathbb{1}_{[-1,1]^2}(x',y').$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien de densités.
2. Montrer que (X,Y) et (X',Y') ne suivent pas la même loi.
3. Montrer que (X,Y) et (X',Y') ont les mêmes lois marginales, c'est-à-dire que X et X' sont de même loi, et que Y et Y' sont de même loi (en fait X, X', Y, Y' sont de même loi !).

Exercice 6. Une personne décide de vendre sa maison au premier acheteur qui fera une offre supérieure ou égale à s euros. On suppose que les offres $(X_1, X_2, \ldots)$ sont indépendantes et suivent la même loi qu'une variable aléatoire X.

1. Soit $N \geq 1$ le nombre d'offres nécessaires pour vendre la maison. Quelle est la loi de N ?
2. Déterminer la loi du prix de vente X_N de la maison, et montrer que le prix de vente est indépendant de N.

Exercice 7.

1. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles. Montrer que (X, Y) suit la loi uniforme sur le carré $[0,1]^2$ si et seulement si X et Y sont indépendantes et de loi uniforme sur $[0,1]$. des v.a. de même loi. Sont-elles indépendantes ?
2. Deux amis se donnent rendez vous entre 12h et 13h, et arrivent indépendamment uniformément entre ces deux horaires. Calculer le temps moyen d'attente du premier arrivé.

3 Exercices supplémentaires

Exercice 8.

1. On considère une fonction $\tilde{g}$, positive, et intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'algorithme
   — Tirer X suivant la densité $a\tilde{g}$, où a est une constante de renormalisation ;
   — Tirer U suivant une loi uniforme sur $[0, \tilde{g}(X)]$;
   permet de tirer (X, U) suivant une loi uniforme sur l'ensemble
$$\mathcal{A} = \left\{(x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ : 0 \leq u \leq \tilde{g}(x)\right\}.$$
2. Réciproquement, si (X, U) suit une loi uniforme sur $\mathcal{A}$ quelle est la loi de X ?

Exercice 9. Soit p une densité de probabilité sur l'intervalle $[0,1]$ suivant laquelle on souhaite simuler en utilisant un algorithme de rejet construit à l'aide d'une suite $((U_i, X_i))_{i \geq 1}$ de vecteurs aléatoires i.i.d. où les U_i sont uniformément réparties sur $[0,1]$. Plus précisément, on suppose qu'il existe un ensemble d'acceptation $\mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}((U_1, X_1) \in \mathcal{A}) > 0$ et que la loi conditionnelle de U_1 sachant $(U_1, X_1) \in \mathcal{A}$ possède la densité p. On note $N = \min\{i \geq 1 : (U_i, X_i) \in \mathcal{A}\}$ et B un sous-ensemble borélien de $[0,1]$.

1. Quelle est la loi de N ? Et celle de U_N ?
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(U_n \in B, N \geq n) = \mathbb{P}(U_n \in B)\mathbb{P}(N \geq n)$.
3. En déduire que $\mathbb{P}(U_N \in B) \leq \mathbb{P}(U_1 \in B)\mathbb{E}(N)$.
4. Conclure que $\mathbb{E}(N) \geq \sup\{\rho \geq 0 : \int_0^1 \mathbb{1}_{\{p(u) \geq \rho\}} \, du > 0\}$.

Exercice 10. On rappelle que pour $a, \lambda > 0$, la loi Gamma $\Gamma(a, \lambda)$ est à densité, donnée par
$$f_{\Gamma(a,\lambda)} : z \mapsto \frac{\lambda^a z^{a-1}}{\Gamma(a)} \, \mathrm{e}^{-\lambda z} \, \mathbb{1}_{\{z>0\}}.$$
On suppose dans la suite que $a > 1$ et on note
$$g_a(z) = z^{a-1} \, \mathrm{e}^{-z} \, \mathbb{1}_{\{z>0\}} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_a = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x \leq \sqrt{g_a(y/x)}\right\}.$$

1. Calculer $\sup_{z>0} g_a(z)$ et $\sup_{z>0} z^2 g_a(z)$. En déduire que $\mathcal{D}_a \subset [0, x_a] \times [0, y_a]$, où $x_a = \left(\frac{a-1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{a-1}{2}}$ et $y_a = \left(\frac{a+1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{a+1}{2}}$.
2. Soit $(X, Y) \sim \mathcal{U}(\mathcal{D}_a)$ un couple uniformément distribué sur $\mathcal{D}_a$, i.e. (X, Y) possède la densité $\frac{1}{|\mathcal{D}_a|} \mathbb{1}_{\{0 \leq y\}} \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq \sqrt{g_a(y/x)}\}}$, où $|\mathcal{D}_a|$ désigne la mesure de Lebesgue de $\mathcal{D}_a$. Quelle est la loi de $W = \frac{Y}{X}$? En déduire que $|\mathcal{D}_a| = \frac{\Gamma(a)}{2}$. Conclure que $Z = \frac{W}{\lambda} \sim \Gamma(a, \lambda)$.
3. Comment simuler des variables suivant les lois $\mathcal{U}(\mathcal{D}_a)$ et $\Gamma(a, \lambda)$?

[1]

PC 7 : Convergence en loi & Théorème limite central

1 Exercices corrigés

Les exercices 1 et 2 reprennent et détaillent des points vus en cours, et sont corrigés.

Exercice 1. On suppose $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$ pour des v.a. (X_n) à valeurs réelles et $c \in \mathbb{R}$. Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \min(x, 1)$.

1. Soit $\epsilon > 0$. Quelle est la limite de $\mathbb{E}[\phi(|X_n - c|/\epsilon)]$ quand $n \to \infty$?
2. En déduire que $X_n \to c$ en probabilité quand $n \to \infty$.

Solution. 1. Pour $\epsilon > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto \phi(|x-c|/\epsilon)$ est continue et bornée. Par la convergence en loi de X_n vers c, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\phi(|X_n - c|/\epsilon)] = \mathbb{E}[\phi(|c - c|/\epsilon)] = 0$.

2. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\phi\left(\frac{|X_n - c|}{\epsilon}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\phi\left(\frac{|X_n - c|}{\epsilon}\right)\mathbb{1}_{\{|X_n-c|\le\epsilon\}}\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{|X_n-c|>\epsilon\}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\phi\left(\frac{|X_n - c|}{\epsilon}\right)\mathbb{1}_{\{|X_n-c|\le\epsilon\}}\right] + \mathbb{P}\left(|X_n - c| > \epsilon\right).\end{aligned}$$

Dans la question 1, on a montré que le terme à gauche tend vers 0 pour tout $\epsilon > 0$ lorsque $n \to \infty$. Comme les deux termes à droite sont positifs, cela implique qu'ils tendent tous les deux vers 0 lorsque $n \to \infty$. La convergence de $\mathbb{P}(|X_n - c| > \epsilon)$ vers 0 quelque soit $\epsilon > 0$ implique la convergence en probabilité de X_n vers c.

Exercice 2. Soient $(X_n)_{n\ge1}$, $(Y_n)_{n\ge1}$ deux suites de variables aléatoires réelles, et X, Y deux variables aléatoires réelles telles que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$.

1. On suppose dans cette question que les variables X_n et Y_n sont indépendantes pour tout $n \ge 1$ et que les variables X et Y sont indépendantes. Montrer que $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, Y)$.
2. (**Lemme de Slutsky**) On suppose que $Y = a$ est constante. Montrer que $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, a)$ en loi.
Indications. On pourra utiliser le fait $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ en probabilité (exercice 1) et écrire pour $\epsilon > 0$ fixé,
$$\begin{aligned}|\mathbb{E}F(X_n, Y_n) - \mathbb{E}F(X, a)| \le |\mathbb{E}F(X_n, a) - \mathbb{E}\left[F(X, a)\right]| \quad &+ \quad \mathbb{E}|F(X_n, Y_n) - F(X_n, a)|\mathbb{1}_{\{|Y_n-a|\ge\epsilon\}} \\ &+ \quad \mathbb{E}|F(X_n, Y_n) - F(X_n, a)|\mathbb{1}_{\{|Y_n-a|<\epsilon\}}.\end{aligned}$$
On admettra également que si Z_n est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, alors $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ si et seulement si pour toute fonction lipschitzienne bornée $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}f(Z_n) \to \mathbb{E}f(Z)$.
3. Est-il toujours vrai que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi ?

Solution. 1. D'après le théorème de Lévy, il suffit de montrer que $\phi_{(X_n,Y_n)}(t, t') \to \phi_{(X,Y)}(t, t')$ pour tout $(t, t') \in \mathbb{R}^2$. Par indépendance (deux fois), on a

$$\phi_{(X_n,Y_n)}(t, t') = \phi_{X_n}(t)\phi_{Y_n}(t') \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \phi_X(t)\phi_Y(t') = \phi_{(X,Y)}(t, t').$$

1. Chargé de PC : Xavier ERNY, xavier.erny@polytechnique.edu

2. Il suffit de montrer que $\mathbb{E}[f(X_n, Y_n)] \to \mathbb{E}[f(X, Y)]$ pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lipschitzienne borné. Supposons que $|f(x, y) - f(x', y')| \leq L(|x - x'| + |y - y'|)$ pour tous $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$. Pour $\epsilon > 0$ fixé, suivons l'indication en majorant $|\mathbb{E}[f(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[f(X, a)]|$ par

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[f(X_n, a)] - \mathbb{E}[f(X, a)]| \quad &+ \quad \mathbb{E}\left[|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)| \mathbb{1}_{\{|Y_n - a| \geq \epsilon\}}\right] \\ &+ \quad \mathbb{E}\left[|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)| \mathbb{1}_{\{|Y_n - a| < \epsilon\}}\right]. \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto f(x, a)$ est continue bornée donc le premier terme de cette somme tend vers 0 (car X_n converge en loi vers X). Le deuxième terme est majoré par $2 \sup |f| \cdot \mathbb{P}(|Y_n - a| > \epsilon)$ qui tend vers 0 (car $Y_n \to a$ en probabilité). Pour le dernier terme, on remarque que

$$|f(X_n, Y_n) - f(X_n, a)| \mathbb{1}_{\{|Y_n - a| < \epsilon\}} \leq L\epsilon.$$

Ainsi, pour n suffisamment grand,

$$|\mathbb{E}[f(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[f(X, a)]| \leq 3L\epsilon.$$

Le résultat désiré en découle.

3. Il n'est pas vrai en général que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi. En effet, considérons les variables aléatoires $X_n = Z = Y_n$ pour tout $n \geq 1$, avec Z gaussienne centrée. La variable Z étant symétrique, on a $X_n \to -Z$ en loi. Si $(X_n, Y_n) \to (-Z, Z)$ en loi, alors $X_n + Y_n \to -Z + Z$ en loi (car la fonction $(x, y) \mapsto x + y$ est continue), c'est à dire $2Z = 0$ en loi, ce qui n'est évidemment pas vrai.

2 Exercices de la PC

Exercice 3. Soit X_n telle que $\mathbb{P}(X_n = 0) = p_n$ et $\mathbb{P}(X_n = n) = 1 - p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner une CNS sur la suite (p_n) pour que, quelle que soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à support compact, $\mathbb{E}[f(X_n)]$ converge dans $\mathbb{R}$ quand $n \to \infty$. *On rappelle que si f est à support compact, il existe un compact $K \subset \mathbb{R}$ tel quel, pour tout $x \notin K$, $f(x) = 0$.*
2. Donner une CNS sur (p_n) pour que X_n converge en loi et donner sa limite.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de carré intégrable, de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$. En notant $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$, étudier la limite p.s. de $\hat{\sigma}_n^2$ puis montrer que

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - m}{\hat{\sigma}_n} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Exercice 5.

1. Etudier la convergence en loi de la suite $\left(\frac{X_n}{n}\right)_{n \geq 1}$, où X_n suit une loi géométrique de paramètre $p_n = \frac{\lambda}{n}$ et $\lambda > 0$ est fixé.
2. Soit X_n une v.a. de loi uniforme sur $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$.
   (a) Trouver la limite en loi de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$. On notera X une v.a. ayant cette loi.
   (b) Comparer la limite de $\mathbb{P}(X_n \in \mathbb{Q})$ avec $\mathbb{P}(X \in \mathbb{Q})$. En écrivant $\mathbb{P}(X_n \in \mathbb{Q}) = \mathbb{E}[1_{\mathbb{Q}}(X_n)]$, le résultat est-il surprenant ?

Exercice 6. Pour tout $n \geq 1$, on définit une fonction F_n sur $[0, 1]$ par

$$F_n : x \mapsto x - \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, la fonction F_n (prolongée par 0 pour $x \leq 0$ et par 1 pour $x \geq 1$) est la fonction de répartition d'une variable X_n à densité.

2. Montrer que X_n converge en loi vers une variable à densité X (mais on remarquera que la densité de X_n ne converge pas presque partout).

Exercice 7. Soient a, b deux réels et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie par $X_0 = 0$, et pour $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = aX_n + b + \xi_{n+1}$$

où $(\xi_n)_{n\geq 1}$ est une suite i.i.d. de $\mathcal{N}(0,1)$ (en particulier, ξ_{n+1} est indépendante de X_n).

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, X_n suit une loi gaussienne de moyenne μ_n et de variance σ_n^2 à déterminer.
2. En déduire la fonction caractéristique de X_n, puis les valeurs de a et b pour lesquelles la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi. On précisera la limite.
3. On suppose maintenant que $|a| < 1$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, le vecteur $Y_n = (X_n, X_{n+1})$ est un vecteur gaussien dont on calculera la moyenne et la matrice de covariance.
   (b) Quelle est la fonction caractéristique de Y_n ? Montrer que $(X_n, X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers un vecteur aléatoire admettant une densité sur $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera.
   (c) En déduire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger en probabilité.

Exercice 8. Pour une constante $m \in \mathbb{R}$, on notera $\mathcal{N}(m, 0)$ la masse de Dirac en m, que l'on verra comme une loi gaussienne dégénérée.

1. Soit X une v.a. gaussienne centrée réduite ; rappeler sa fonction caractéristique $t \mapsto \phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ et en donner le développement en série entière en 0 ; en déduire l'expression des moments de X : $\mathbb{E}[X^k]$ pour tout $k \geq 0$.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. gaussiennes $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n)$ qui converge en loi vers une v.a. X qui est finie presque sûrement. Montrer successivement que :
   (a) la suite $(m_n)_{n\geq 1}$ est bornée ; *on pourra raisonner par l'absurde* ;
   (b) la suite $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite $\sigma \in [0, \infty[$;
   (c) la suite $(m_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite $m \in \mathbb{R}$;
   (d) la variable X suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

3 Exercices supplémentaires

Exercice 9. Soit $(U_n)_n$ une suite i.i.d. de v.a. uniformes sur $[0,1]$. Soit

$$X_n = n(1 - \max(U_1, ..., U_n)).$$

Étudier la convergence en loi de X_n.

Exercice 10. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $Z_n = \max(X_1, ..., X_n)$. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers une v.a. Z à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$.
2. En supposant que X_1 n'est pas majorée (i.e. pour tout $M > 0$, $\mathbb{P}(X_1 > M) > 0$), montrer que $Z = +\infty$ presque sûrement.
   Indice : commencer par montrer que, pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(Z \leq t) = 0$.
3. Supposons que X_1 suit la loi exponentielle de paramètre 1. Montrer $Y_n = Z_n - \ln n$ converge en loi.
   Remarque : la question 2. montre que Z_n tend vers l'infini presque sûrement, et la question 3. permet de quantifier (en un certain sens) la vitesse à laquelle Z_n tend vers l'infini (de l'ordre de $\ln n$).

Le but de l'exercice suivant est de montrer un corollaire d'un cas particulier de la loi du logarithme itéré : soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. i.i.d. centrées réduites et $\tilde{S}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n X_j$. Alors, presque sûrement,

$$\limsup_n \tilde{S}_n/(\sqrt{2\ln\ln n}) = 1 \text{ et } \liminf_n \tilde{S}_n/(\sqrt{2\ln\ln n}) = -1.$$

Exercice 11. Dans cet exercice, nous utilisons les notations du paragraphe ci-dessus, et noterons en plus $S_n = \sum_{k=1}^n X_k = \sqrt{n}\tilde{S}_n$.

1. Supposons (seulement dans cette question) que $X_1 \sim \mathcal{U}([-1,1])$. Montrer que, pour tout $t > 0, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}\left[e^{tX_1/\sqrt{n}}\right] \leq 1$. En déduire que,
$$\mathbb{E}\left[e^{t\tilde{S}_n}\right] \leq 1. \tag{1}$$
2. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(S_n \geq 0) > c$.
3. Pour $x > 0$, soit $\tau_x = \inf\{k \in \mathbb{N}^* \ : \ S_k > x\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\mathbb{P}(\exists k \leq n, S_n > x)$ en fonction des probabilités des événements $\{\tau_x = k\}$ $(1 \leq k \leq n)$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, soit $A_k = \{S_n - S_k \geq 0\}$. En partitionnant l'événement $\{S_n > x\}$ en fonction des événements $\{\tau_x = k\}$ et A_k, montrer que
$$\mathbb{P}(\exists k \leq n, S_k > x) \leq \frac{1}{c}\mathbb{P}(S_n > x),$$
où la constante c est définie à la question 2.
5. Soit $n_r = 2^r$. Soit
$$B_r = \bigcup_{n_r \leq n < n_{r+1}} \left\{ S_n > \frac{1}{r}\sqrt{n_r}\ln\ln n_r \right\}.$$
En supposant que la propriété (1) est vraie, montrer que $\mathbb{P}(\limsup_r B_r) = 0$. En déduire que, presque sûrement,
$$\limsup_n \tilde{S}_n/\ln\ln n \leq 0.$$
Remarque : via un raisonnement similaire, il est aussi possible de montrer que la $\liminf$ est positive p.s., ce qui implique que $\tilde{S}_n/\ln\ln n$ converge presque sûrement vers 0.