UEVE 2020-2021
EC322 Probabilités

Feuille 1 de travaux dirigés

Evénement, Dénombrement, Probabilité

Exercice 1. Trois boules sont tirées successivement d'une urne contenant des boules blanches et des boules rouges. Soient les événements :

B_1 : "la 1-ière boule est blanche", B_2 : "la 2-ième boule est blanche", B_3 : "la 3-ième boule est blanche".

Exprimer les événements suivants en fonction de B_1, B_2 et B_3 :

1. "Toutes les boules sont blanches"
2. "Les deux premières boules sont blanches"
3. "Au moins une boule est blanche"
4. "Seulement la troisième boule est blanche"
5. "Exactement une boule est blanche"
6. "Au moins deux boules sont blanches"
7. "Aucune boule n'est blanche"
8. "Exactement deux boules sont blanches".

Exercice 2. Donner l'expression simplifiée des événements suivants:

1. $(E \cup F) \cap (E \cup F^c)$
2. $(E \cap F) \cup (E^c \cap F)$
3. $(E \cup F) \cap (E^c \cup F) \cap (E \cup F^c)$.
4. $(E \cup F) \cap (F \cup G)$ si $E \subset F \subset G$.
5. $(E^c \cup F^c)^c \cap (F^c \cup G^c)$ si $E \subset F \subset G$
6. $E \cap (E \cap F)^c$ si $E \subset F$.

Soient E et F deux évéments d'un univers Ω. Montrer que

$$E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c) \quad \text{et que} \quad E \cup F = (E \cap F) \cup (E \cap F^c) \cup (F \cap E^c)$$

et représenter les ensembles à l'aide d'un dessin.

Exercice 3. Soit $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble de cardinal n et $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω, qui est composé de l'ensemble vide $\emptyset$ et de l'ensemble des unions de singletons de Ω. On veut montrer que le cardinal de $\mathscr{P}(\Omega)$ est 2^n. Pour cela on écrit chaque élément de $\mathscr{P}(\Omega)$ comme union de singletons de Ω et on le code en lui faisant correspondre une succession de n cases où la case i prend la valeur 1 lorsque le singleton $\{a_i\}$ est présent dans l'union et la valeur 0 sinon. Par exemple, si $\Omega = \{a_1, a_2, a_3\}$, alors l'événement $A = \{a_1, a_3\} \in \mathscr{P}(\Omega)$ est codé 101 et l'événement $B = \{a_3, a_2\} \in \mathscr{P}$ est codé 011.

On suppose que $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

1. Coder les événements suivants: $\emptyset, \{a_2, a_n\}, \{a_3, a_{n-1}, a_n\}, \Omega$.

2. En déduire que le cardinal de $\mathscr{P}(\Omega)$ est 2^n.

Exercice 4. Combien de nombres peut-on former avec les chiffres $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, chaque chiffre n'étant présent qu'une fois, de façon que chaque nombre commence par 7 et soit divisible par 5,

1. si les nombres sont de 8 chiffres ?

2. si les nombres sont de 6 chiffres ?

Exercice 5. Vous disposez de 5 billes rouges, de 2 blanches et de 3 jaunes que vous voulez aligner sur 10 cases. Les billes de même couleur sont indiscernables.

1. De combien de façons pouvez-vous disposer les 5 billes rouges?
2. De combien de façons pouvez-vous disposer les 2 billes blanches une fois que les rouges sont posées?
3. De combien de façons pouvez-vous disposer les 3 billes jaunes restantes?
4. En déduire le nombre de façons d'aligner toutes les billes. Un exemple d'alignement est: *rrrrbrjbjj*, où *r* désigne une boule rouge, *b* une boule blanche, et *j*, une boule jaune.

Exercice 6. On tire au hasard (et en même temps, de sorte que l'ordre de tirage ne compte pas) 3 boules d'une urne contenant 4 boules blanches et 2 boules noires. Quelle est la probabilité que l'une des boules tirées soit noire et que les deux autres soient blanches.

Exercice 7. On lance un dé pipé pour lequel

- les faces paires ont toutes les mêmes chances d'apparition.
- les faces impaires ont toutes les mêmes chances d'apparition.
- une face paire donnée a deux fois plus de chances d'apparaître qu'une face impaire donnée.

Alors

1. Déterminer la probabilité d'apparition d'une face paire.
2. Déterminer la probabilité d'apparition d'une face impaire.

Exercice 8. Soit A et B deux évément d'un univers Ω.

1. Montrer que $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
2. En déduire que si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Exercice 9. Soit A et B deux évément d'un univers Ω tels que $\mathbb{P}(A) = 0.6$, $\mathbb{P}(B) = 0.4$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.2$. Déterminer les probabilités de

$$A \cup B; \quad A^c; \quad B^c; \quad A^c \cup B^c; \quad A^c \cap B; \quad A \cup B^c; \quad A^c \cap B^c.$$

Exercice 10. Quelle est, dans une classe de 30 élèves, la probabilité pour que deux élèves au moins aient le même jour d'anniversaire?

Exercice 11. On jette 3 dés discernables non pipés. Calculer la probabilité

1. d'obtenir au moins un as ;
2. d'obtenir au moins 2 faces portant le même chiffre ;
3. que la somme des points de chaque face soit paire.

UEVE 2020-2021
EC322 Probabilités

Feuille 2 de travaux dirigés

Probabilité conditionnelle, Indépendance

Exercice 1. Soit E et F deux événements d'un univers Ω, tels que $\mathbb{P}(F) \notin \{0, 1\}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(\bar{E}|F) = 1 - \mathbb{P}(E|F)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(E|\bar{F})$. A-t-on $\mathbb{P}(E|\bar{F}) = 1 - \mathbb{P}(E|F)$?
3. Montrer que $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E|\bar{F})\mathbb{P}(\bar{F})$.

Exercice 2. On joue à Pile ou Face en lançant 3 fois une pièce de monnaie non truquée avec la règle de jeu suivante: on gagne 1€ si Pile apparaît et on perd 1€ sinon. Soit les événements

E : "gagner 1€ à l'issu des trois lancers"
F : "avoir exactement un Pile aux deux premiers lancers"
G : "avoir Face au premier lancer"

1. Déterminer l'ensemble Ω des résultats possibles à l'issu des 3 lancers.
2. Déterminer $\mathbb{P}(E|F)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(E|G)$.
4. Expliquer, en dehors des calculs, pourquoi $\mathbb{P}(E|G) \leq \mathbb{P}(E|F)$.

Exercice 3. Un étudiant passe un concours composé de 4 épreuves écrites de niveaux de difficulté équivalents. Pour réussir le concours il doit valider les 4 épreuves, le résultat d'une épreuve étant affiché avant l'entame d'une nouvelle épreuve. Montrer que la probabilité de réussir le concours sachant qu'il a validé les deux premières épreuves est inférieure à la probabilité de réussir le concours sachant qu'il a validé les trois premières épreuves.

Exercice 4. Une urne contient 6 boules blanches, 4 boules rouges et 5 boules jaunes. On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'avoir successivement (si les événements élémentaires sont équiprobables: les boules sont juste de couleurs difffentes mais elles sont identiques)

1. une boule rouge, une boule jaune, une boule blanche,
2. une boule blanche, une boule jaune, une boule blanche,
3. une boule rouge, une boule rouge, une boule jaune.

Exercice 5. Un examen systématique de dépistage est institué pour détecter une maladie M. On sait que le risque d'avoir cette maladie est de 0.01. L'examen donne des "faux positifs" avec probabilité 0.02 et des "faux négatifs" avec une probabilité de 0.001.

1. Déterminer la probabilité que le test se révèle positif sur un individu tiré au hasard.
2. Un individu subit un examen qui se révèle positif. Quelle est la probabilité qu'il soit malade?

Exercice 6. Dans un petit pays d'un million d'habitants, on a vacciné 100000 personnes contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, 50000 personnes sont malades. On constate que seul une personne vaccinée sur 100 tombe malade.

1. Quelle est la probabilité pour une personne non vaccinée de tomber malade.
2. Le vaccin est-il efficace ?

Exercice 7. Alcootest : Un laboratoire a mis au point un alcootest et décide d'en vérifier la crédibilité. Les résultats obtenus sont les suivants:

- 2% des personnes controlées par la police sont effectivement en état d'ébriété.
- 95 fois sur 100 l'alcootest s'est révélé positif alors que la personne était réellement en état d'ébriété.
- 5 fois sur 100, l'alcootest s'est révélé positif, alors que la personne n'était pas en état d'ébriété.

1. Quelle est la probabilité que l'alcootest donne une indication correcte?
2. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement en état d'ébriété lorsque l'alcootest est positif?

Exercice 8. On souhaite prendre en location un F3 dans l'Essonne. Supposons que le site PAP publie régulièrement des offres de locations de F3 et que ces appartements peuvent être classés en trois types selon leur état global: type1 = excellent état, type2 = bon état, type3 =état moyen.

On suppose que la durée de l'annonce sur le site reflète l'état du bien et que

- la probabilité qu'une annonce de location de F3 dépasse 4 semaines sachant qu'elle est de type 1 est 0.04,
- les probabilités qu'une annonce de location de F3 dépasse 4 semaines sachant qu'elle est de type 2 et 3 sont respectivement de 0.2 et 0.5,
- $1/8$ des annonces de F3 sont de type 1, $3/8$ d'entre elles sont de type 2 et la moitié d'entre elles de type 3.

1. Déterminer la probabilité qu'une annonce de location de F3 tirée au hasard dépasse 4 semaines.
2. En surfant sur le site PAP, on tombe sur une annonce qui a dépassé 4 semaines. Quelle est la probabilité que le F3 soit de type 1? de type 2? de type 3?

Exercice 9. On lance deux fois un dé équilibré. Soit F l'événement "on obtient 2 au premier lancer", E l'événement "la somme des nombres obtenus aux deux lancers fait 8" et soit G l'événement "la somme des nombres obtenus aux deux lancers fait 7".

$a)$ Les événements E et F sont-ils indépendants?

$b)$ Les événements G et F sont-ils indépendants?

Exercice 10. On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée et on note la face qui apparaît. On suppose que les événements élémentaires de $\Omega = \{\mathrm{PP}, \mathrm{PF}, \mathrm{FP}, \mathrm{FF}\}$ sont équiprobables. Soit E l'événement "on obtient Face au premier lancer", G l'événement "on obtient Face au second lancer" et H l'événement "on obtient deux Faces".

1. Montrer que les événements E et G sont indépendants.
2. Les événements E et H sont-ils indépendants?

UEVE 2020-2021
L2 *Maths/DL Math-Eco/Info/DL Bio-Info* *Probabilités*

Feuille 3 de TD: Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. Dans un aéroport, le nombre d'avions X qui se préparent à atterrir au cours d'une minute satisfait

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-1}\frac{1^k}{k!}, \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}.$$

On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre 1.

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Si la capacité d'accueil de l'aéroport est de 2 avions par minutes, quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas d'attente pendant une minute donnée ?
3. Même question si l'aéroport peut accueillir trois avions à la minute?

Exercice 2. On dispose d'un dé non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère le jeu aléatoire suivant. On lance trois fois le dé: à chaque lancer, on gagne 5€ si la face 6 apparaît, sinon (si une autre face apparaît), on perd 1€. Soit X la quantité représentant notre richesse à l'issu des trois lancers.

1. Quelle est l'ensemble des valeurs prises par X.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Déterminer la fonction de répartition de X et représentez-la graphiquement.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 1/4 & \text{si } x \in [3, 5[\\ 5/8 & \text{si } x \in [5, 10[\\ 1 & \text{si } x \geq 10. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 4. Un hôtel constate un taux importants d'annulation de réservation à certaines périodes prisées. Pour éviter d'avoir des chambres vides à ces périodes, il décide de faire de la surréservation en validant plus de réservations que la capacité d'accueil de l'hôtel. On suppose que chaque client potentiel se présente effectivement à l'hôtel avec une probabilité $p = 2/3$ et que les comportements des clients sont indépendants les uns des autres. L'hôtel a réservé $n = 55$ chambres alors qu'il en dispose que $N = 50$.
I. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de client se présentant effectivement à l'hôtel.

1. Quelle est la loi de X?
2. Quelle est son espérance?
3. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas assez de chambres pour accueillir tous les clients? (posez la formule sans nécessairement faire les calculs).

II. On veut maintenant déterminer le nombre de chambres en surréservation qui permet à l'hôtel d'assurer un taux de remplissage de 98%: c'est-à-dire, si X_i représente le client i, on veut déterminer m tel que

$$\mathbb{P}\big(X_1 + \ldots + X_{50} + \ldots + X_{50+m} \leq 50\big) = 0.98.$$

On utilisera pour cela le Théorème de la limite centrale en supposant que l'on peut écrire:

$$\frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\sqrt{\text{Var}(Y)}} = Z \sim \mathcal{N}(0,1), \qquad \text{avec } Y = X_1 + \ldots + X_{50} + \ldots + X_{50+m}. \tag{1}$$

1. La variable aléatoire Y est-elle de loi de Bernoulli ou de loi Binomiale (spécifiez ses paramètres)?
2. Que valent $\mathbb{E}(Y)$ et Var(Y) (on ne vous demande pas de faire des calculs)?

3. En utilisant (1) et en admettant que $\mathbb{P}(Z \leq 2.05) = 0.98$, montrer que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\big(X_1 + \ldots + X_{50} + \ldots + X_{50+m} \leq 50\big) = 0.98 \\ \iff \quad & 2 \times (50+m) + \sqrt{2} \times 2.05 \times \sqrt{50+m} - 150 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

4. Posez $x = \sqrt{50+m}$ et résolvez l'équation du second degré associé à (2).

5. Déduire la valeur de m.

Exercice 5. Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots\}$ telle que

$$p(i) = \mathbb{P}(X = i) = c\frac{\lambda^i}{i!},\ i = 0, 1, 2, \ldots$$

1. Déterminer la constante c.

2. Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}(X \geq 2)$.

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 6. On lance une pièce de monnaie truquée dont la probabilité d'apparition de Pile est p. Soit X la variable aléatoire représentant le premier instant où Pile apparaît.

1. Montrer que X est une v.a. à valeurs dans $\{1, 2, \ldots\}$ et que sa loi de probabilité est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \ldots;\ p \in]0, 1[.$$

2. Qu'attendons-nous sur l'espérance de X lorsque p est proche de 0 et lorsque p est proche de 1. Calculer l'espérance de X.

3. Calculer Var(X).

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $\{-2, -1, 1, 2\}$ avec

$$\mathbb{P}(X = -2) = ? \quad \mathbb{P}(X = -1) = 1/4 \quad \mathbb{P}(X = 1) = 1/4 \quad \mathbb{P}(X = 2) = ?$$

1. Déterminer les valeurs manquantes pour que $\mathbb{E}(X) > 0$.

2. Calculer l'espérance de X pour les valeurs choisies.

3. Déterminer la variance de X.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et $p \in]0, 1[$ et on suppose que $\lambda = np$ est une constante (indépendante de n).

1. Montrer que pour tout $k = 0, \ldots, n$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}.$$

2. Calculer la limite des quantités: $\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}$ et $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Montrer que lorsque n est grand

$$\mathbb{P}(X = k) \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

4. On s'intéresse à la loi du nombre de fautes (d'orthographe, de grammaire, ...) par page d'un grand journal. On suppose que la probabilité p de rencontrer une faute sur une page est très petite et que la loi du nombre X de fautes par page est une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$ où n représente le nombre de mots d'une page. Déterminer $\mathbb{P}(X = 0), \mathbb{P}(X = 1), \mathbb{P}(X \geq 3)$ lorsque $\lambda = 0.02$.

Exercice 9. Soit X une v.a. de loi de Bernoulli de paramètre p, $p \in]0, 1[$. Calculer l'espérance et la variance de X. Trouver la fonction de répartition de X et tracer son graphe.

Exercice 10. Calculer l'espérance et la variance des v.a. suivantes:
a) X une v.a. uniforme sur l'ensemble $\{1, \dots, N\}$;
b) X une v.a. de loi Binomiale de paramètres (n, p).

Exercice 11. Un moteur d'avion tombe en panne pendant le vol avec probabilité p, indépendamment des autres. L'avion s'écrase si plus de la moitié de ses moteurs sont en panne. Quel type d'avion est plus sûr : à deux, trois au quatre moteurs ?

Exercice 12.(*extrait de l'examen 2019*) On lance une pièce de monnaie dont la probabilité d'apparition de Pile est p. On suppose que $p \in]0, 1[$ et on note $q = 1 - p$. On suppose que les événements liés aux différents lancers de la pièce sont indépendants. Soit X la variable aléatoire représentant le premier instant où la pièce tombe sur Pile.

1. Donner la loi de X: l'ensemble de ses valeurs et la probabilité de chaque valeur.

2. Pour tout $n \in^*$, calculer la fonction de répartition de X : $F_X(n) = \mathbb{P}(X \leq n)$. Trouver $\lim_{n \to +\infty} F_X(n)$.

3. Pour tout $n \in^*$, calculer $\mathbb{P}(X > n)$. Donner deux méthodes de calcul: la première basée sur la question précédente, et la deuxième basée sur la description de l'événement $\{X > n\}$ en termes des résultats des n premières épreuves.

4. Pour tout $n \in^*$, $k \in^*$, montrer que
$$\mathbb{P}(X > n + k | X > n) = \mathbb{P}(X > k).$$
Expliquer pourquoi cette propriété s'appelle "l'absence de mémoire".

5. On suppose que $p = 1/2$. Sachant que le Pile n'est pas sorti pendant les deux premiers lancers, quelle est la probabilité qu'il faille encore attendre plus de trois lancers supplémentaire pour que Pile apparaisse pour la première fois.

Indications: Si $q \in]0; 1[$, on a $1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

UEVE 2020-2021
EC 322 Probabilités 1

Feuille 4 de travaux dirigés

Exercice 1. (*Loi uniforme*) On considère le jeu aléatoire suivant impliquant deux joueurs: un joueur R disposant de 3 pions rouges et un joueur V disposant de 3 pions verts. On considère un intervalle $[a, b]$ ($a < b$) sur lequel on jette une petite bille selon une loi uniforme X sur $[a, b]$ de densité de probabilité

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Le jeu se déroule comme suit.

- Les joueurs placent leur trois pions les uns après les autres en des points de l'intervalle $[a, b]$.
- Une fois placés les joueurs n'ont plus la possibilité de déplacer leurs pions.
- On lance la bille selon une loi uniforme sur $[a, b]$ et
  a) si la bille passe le plus près d'un des pions du joueur R que ceux du joueur V alors le joueur R marque un point
  b) si la bille passe le plus près d'un des pions du joueur V que ceux du joueur R alors le joueur V marque un point.
  c) sinon les joueurs marquent tous les deux un point.

  On renouvelle l'expérience à 10 reprises et le gagnant sera celui qui aura marqué le plus de points.

1. Déterminer la fonction de répartition de X.
2. Pour simplifier on pose $a = 0$ et $b = 1$. Le joueur R choisit les emplacements $1/6$, puis $1/2$ et ensuite $5/6$ de l'intervalle $[0, 1]$ et le joueur V les emplacements $1/4$, puis $1/2$ et ensuite $3/4$.
   a) Quelles sont les chances pour le joueur R de marquer un point.
   b) Quelles sont les chances pour le joueur V de marquer un point.
   c) En déduire lequel des deux joueurs a le plus de chances de gagner la partie.
   d) Existe-t-il une stratégie qui permet de toujours avoir le plus de chances de gagner quelque soit la stratégie de l'adversaire.

Exercice 2. (*Une loi continue*) Soit la fonction $f(x) = c\,x^2\mathbf{1}_{]0,4[}(x) = \begin{cases} c\,x^2 & \text{si } x \in]0, 4[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Déterminer c pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X la variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(2 < X < 4)$. Que vaut $\mathbb{P}(2 < X \leq 4)$?

Exercice 3. (*Loi exponentielle à partir d'une loi uniforme*) Soit X une v.a de loi uniforme sur $]0, 1[$.

1. Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et soit Y la v.a. définie par $Y = a + (b - a)X$.
   (a) Déterminer la densité de probabilité de Y.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

2. Soit $\lambda > 0$ et soit Z la v.a. définie par

$$Z = -\frac{\ln(X)}{\lambda}.$$

   (a) Déterminer la densité de Z et identifier sa loi.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de Z.
   (c) Calculer $\mathbb{E}(Z\mathbf{1}_{\{Z\geq 2\}})$.
   (d) Calculer $\mathbb{E}(Z^n)$ pour tout $n \geq 1$.
   (e) Montrer que pour tout $s, t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(Z > t + s | Z > s) = \mathbb{P}(Z > t).$$

Application. On considère les durées de vie (en année) d'ampoules de même type d'une usine de fabrication d'ampoules. On suppose que la durée de vie d'une ampoule est la v.a. Z de loi donnée précédemment de paramètre $\lambda = 1.5$. On achète une ampoule de ce type.

1. Quelle est la probabilité pour qu'elle dure au moins: 2 ans? 5 ans?

2. Quelle est la probabilité pour qu'elle dure au moins un mois de plus sachant qu'elle a duré 2 ans?

Exercice 4. (*Moments d'une loi gaussienne standard*) Soit Y une v.a. gaussienne de moyenne μ et de variance $\sigma^2 > 0$: $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. Montrer que

$$X = \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

2. Calculer $\mathbb{E}(X^3)$ et $\mathbb{E}(X^4)$.

3. Calculer, pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}(X^{2n})$ et $\mathbb{E}(X^{2n+1})$.

4. Calculer $\mathbb{E}(e^{tX})$, pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. (*Loi gaussienne*) Soit Y une v.a. gaussienne de moyenne μ et de variance $\sigma^2 > 0$: $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On rappelle que

$$X = \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

1. Démontrer que la v.a. X est symétrique par apport à sa moyenne, c'est-à-dire, X et $-X$ ont la même loi ou autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(-X \leq x).$$

   En déduire que pour tout $x \geq 0$,

   (a) $\mathbb{P}(|X| \geq x) = 2\,\mathbb{P}(X \geq x)$.
   (b) $\mathbb{P}(|X| \leq x) = 2\,\mathbb{P}(X \leq x) - 1$.

Application. On considère que la note de contrôle de probabilité des étudiants de L2 Maths est distribuée selon une loi normale de moyenne 12.5 et de variance 2 et que celle des étudiants de L1 Maths est distribuée selon une loi normale de moyenne 12.5 et de variance 7.

1. Quelle est la probabilité qu'un étudiant de L1 Maths ait une note supérieure ou égale à 17.

2. Quelle est la probabilité qu'un étudiant de L2 Maths ait une note supérieure ou égale à 17.

3. Vous êtes en licence (sans avoir redoubler) et vous rencontrez un étudiant qui est entrée à l'université une année après vous et qui suit la filière Maths. Lors de votre conversation il vous dit avoir eu 17 en contrôle de probabilité sans vous avoir dit s'il est en L1 ou en L2. Pourriez-vous déviner son niveau le plus probable connaissant les statistiques précédentes.

Exercice 6. (*Loi gaussienne*) On vous distribue vos notes de probabilité et votre collègue vous dit avoir eu $18/20$ sans vouloir vous montrer sa copie.

On suppose que les notes de probabilité sont réparties selon une loi Normale de moyenne μ et de variance σ^2 qui sont supposées être la moyenne empirique et la variance empirique de la classe communiquées par le professeur et qui sont respectivement de 11.75 et de 3.2.

1. Quelle est la probabilité qu'un étudiant donné ait une note supérieure ou égale à 18.

2. Quelle crédibilité pouvez-vous accorder à l'affirmation de votre collègue.

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne, de moyenne μ et de variance σ^2: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\sigma > 0$, et soit $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

1. Rappelez l'expression de la fonction de répartition F_Z de Z. Peut-on la calculer explicitement $F_Z(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.

2. En vous servant de la table de la gaussienne, déterminez les quantités suivantes et représentez les graphiquement:
$$\mathbb{P}(Z \leq 0), \quad \mathbb{P}(|Z| \leq 3), \quad \mathbb{P}(|Z| > 3).$$

3. Déterminer les réels a et c tel que $\mathbb{P}(Z \leq a) = 0.05$; $\mathbb{P}(|Z| \leq c) = 0.05$.

4. On pose $\mu = 3.5$ et $\sigma^2 = 4$. Déterminer les quantités suivantes:
$$\mathbb{P}(X \leq 0) \quad \text{et} \ \mathbb{P}(X > 3).$$

5. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. i.i.d de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et soit $Y = \sum_{i=1}^n X_i$. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

Exercice 8. On suppose que sur une seconde période d'un match de foot, le nombre X de kilomètres parcouru par un joueur non dopé suit une loi gaussienne de moyenne $\mu = 4.5$ km et de variance $\sigma^2 = 4$. Supposons que la FIFA décide de faire passer un "test pour dopage" à tout joueur dont le nombre de kilomètres parcouru x lors de la seconde partie est invraisemblablement élevé à leurs yeux, c'est-à-dire, $\mathbb{P}(X \geq x) \leq 0.005$.

1. Un joueur a parcouru 7.6 km lors de la seconde partie. Doit-on lui faire passer un "test pour dopage"?

2. Quelle est la distance minimale parcourue x à partir de laquelle on doit faire passer un "test pour dopage" à un joueur. C'est-à-dire, trouver x tel que $\mathbb{P}(X \geq x) = 0.005$.

Données. On rappelle que si $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$ alors $\mathbb{P}(Z \leq 1.55) = 0.9394$, $\mathbb{P}(Z \leq 0.78) = 0.7823$, $\mathbb{P}(Z \leq 2.57) = 0.995$.

UEVE 2020-2021
EC 322 Probabilités

Feuille 5 de travaux dirigés

Exercice 1. Soit X et Y deux variables aléatoires á valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. La loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant:

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	1/5	C	1/5
0	1/15	1/15	1/15
1	1/5	0	1/5

1. Trouver la valeur de la constante C.
2. Calculer $\mathbf{P}(X > 0; Y > 0)$.
3. Donner les lois marginales de X et de Y.
4. Calculer $\mathbf{E}X$ et $\mathbf{E}Y$.
5. Calculer la covariance du couple (X, Y).
6. X et Y, sont-elles indépendantes ?

Exercice 2.

Soient X et Y deux v.a. indépendantes des espérances et de variances respectives $m_X, m_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2$. On définit des variables aléatoires

$$A = 2X - 3Y, \quad B = X - Y.$$

Calculer

1. $\mathbf{E}A$, $\mathbf{E}B$.
2. $\mathbf{Var}(A)$, $\mathbf{Var}(B)$.
3. $\mathbf{Cov}(A, B)$.

Exercice 3. On dispose de deux pièces de monnaie truquées dont les probabilités d'apparition de Pile sont p_1 et p_2 (on les appelle pièce I et pièce II, respectivement) avec $p_1, p_2 \in]0, 1[$. On les lance (simultanément) jusqu'à l'apparition de Pile pour l'une des pièces ou les deux pièces (on arrête de lancer une pièce dès que Pile apparaît et on poursuit les lancers avec l'autre pièce). Soit X la variable aléatoire représentant le rang de la première apparition de Pile pour la pièce I et Y la variable aléatoire représentant le rang de la première apparition de Pile pour la pièce II. La loi du couple est donnée

$$\mathbb{P}(X = i; Y = j) = (1 - p_1)^{i-1}(1 - p_2)^{j-1} p_1 p_2, \qquad i, j = 1, 2, \ldots$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
3. Calculer $\mathbb{E}(XY)$.
4. Que vaut la covariance entre X et Y: $\mathrm{Cov}(X, Y)$?
5. Déterminer la probabilité pour que Pile apparaisse en premier avec la pièce I.

Exercice 4. On est sur le point de passer à la caisse d'une grande surface et on doit choisir de s'insérer sur une des deux queues (queue I et II) qu'on a identifiées. On suppose que le temps d'attente pour les deux queues identifiées est une variable aléatoire (X, Y) (X représentant la queue I et Y la queue II) dont la densité est

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. Quelle est la probabilité pour que le temps d'attente sur la queue I soit inférieur ou égal au temps d'attente sur la queue II.
3. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
4. Calculer $\mathbb{E}(XY)$.
5. Que vaut la covariance entre X et Y: $\mathrm{Cov}(X, Y)$?

Exercice 5. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires représentant la dépense mensuelle d'un couple où X représente l'homme et Y la femme. On suppose que la densité de (X, Y) est

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{(b-a)^2} & \text{si } a < x \leq y < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $0 < a < b$.

1. Quelle est la probabilité pour que l'homme dépense plus que la femme.
2. Quelle est la probabilité pour que les dépenses de la femme soient au moins le double de celles de l'homme. Faites l'application pour $a = 1000$€ et $b = 1500$€.
3. Déterminer la densité de X et celle de Y.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
5. On pose $a = 1000$€ et $b = 1500$€.
   (a) Quelle est la probabilité pour que l'homme dépense au moins 1100€.
   (b) Quelle est la probabilité pour que la femme dépense au moins 1100€.
6. Déterminer la covariance entre X et Y: $\mathrm{cov}(X, Y)$. En déduire le coefficient de correlation linéaire entre X et Y.

UEVE 2020-2021
EC 322 Probabilités 1

Feuille 6 de travaux dirigés

Exercice 1.(*Moyenne empirique*) Soit $X_1, \ldots X_n$ une suite de v.a. i.i.d. telle que $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ et $\mathbb{E}[X_1] = m$, $Var[X_1] = \sigma^2$. On note $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$. Trouver la moyenne et la variance de $\bar{X}_n$.

Exercice 2. (*Théorème central limite*) On découpe un gros projet en mini-projets par jour ouvré. On suppose que le nombre d'heures de travail par jour ouvré sur le projet est une suite $(X_k)_k$ de variables aléatoires i.i.d de moyenne $\mu = 4$ et de variance $\sigma^2 = 4$. Aussi, pour que le projet soit rentable pour l'entreprise, le nombre total d'heures de travail sur le projet ne doit pas dépasser 280 h.

1. Rappeler le théorème central limite.
2. Etant donné que l'entreprise ne valide un projet que si elle est sûre à 98% que les contraintes sur le temps total de travail seront respetées, qu'elle est le nombre maximal de jours ouvrés de travail à préevoir pour ce projet.
3. Qu'elle date de livraison (en jours ouvrés) à proposer au client si celle-ci doit être fixée 5 jours ouvrés après la durée maximale prévue pour le projet.
4. Qu'elle est le temps moyen de travail par jours ouvrés que doit respecter l'entreprise si le client demande une livraison au bout de 55 jours ouvrés. On suppose qu'on a toujours $\sigma^2 = 4$.